JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

QUATRIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HALPHEN, E. LAGUERRE, M. LÉVY, A. MANNHEIM, É. PICARD, H. RESAL.

TOME DEUXIÈME. — ANNÉE 1886.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1886

(Tous droits réservés.)

QH
1
J684
Sér. 4
t. 2

20801
c.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire d'optique géométrique comprenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques (1);

PAR M. A. MANNHEIM.

Ce Mémoire renferme la solution géométrique complète, donnée pour la première fois et dans le cas le plus général, du problème de la détermination des éléments des surfaces caustiques.

Quelques mots d'historique vont me permettre de préciser l'état de la question : « De Tschirnhausen ouvrit la voie à de nouvelles spécula-

(1) Dans sa séance du 12 avril 1885, sur le rapport de MM. les professeurs Cremona et Beltrami, l'Académie R. des Lincei a décidé l'insertion de ce Mémoire dans ses *Atti*.

tions géométriques en considérant la courbe enveloppe d'une série de rayons lumineux réfléchis par une ligne *dirimante* et correspondant à des rayons incidents parallèles (*Acta Lipsiæ*, novembre 1682). Ces nouvelles courbes reçurent le nom de *caustiques par réflexion* et furent étudiées par de La Hire, Leibnitz (*ibid.*, janvier 1689) et Jean Bernoulli (janvier 1692). Enfin Jean Bernoulli, considérant les caustiques par réfraction, donna la construction géométrique du point où chaque rayon réfracté touche son enveloppe (janvier 1693) et le marquis de l'Hôpital (*Analyse des infiniment petits*, proposition I, Section VI et VII) substitua à ces constructions deux formules qui ont été reproduites par Petit et ont conservé son nom [*Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. II, p. 354] (¹) ».

M. A. Cornu a donné une construction élégante du point où un rayon réfracté touche son enveloppe, en faisant usage d'un point qu'il appelle *centre de jonction* (²).

Ainsi, pour le cas du plan, on a formules et constructions.

Ce n'est qu'au commencement de ce siècle (1808) que la question de l'espace fut abordée par Malus dans son *Optique* (³). Cet illustre physicien démontra « que toutes les fois que l'on considère un système de lignes droites émanant de tous les points d'une surface courbe suivant une loi analytique quelconque, le lieu des points de rencontre des lignes proposées est compris sur deux surfaces courbes ». Lorsque ces droites sont des rayons lumineux réfractés, Malus donne à ces surfaces le nom de *surfaces caustiques*. Il a aussi découvert un théorème généralisé ainsi par Dupin :

Des rayons lumineux normaux à une surface se réfléchissent ou se réfractent suivant des directions normales à une surface.

On sait qu'on appelle *foyers* les deux points où un rayon lumineux réfracté touche les surfaces caustiques : ces points ne sont pas toujours réels. Les plans tangents des surfaces caustiques aux deux foyers sont les *plans focaux*.

(¹) Paul Serret, *Des Méthodes en Géométrie*, p. 72.

(²) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. II, p. 311.

(³) *Journal de l'École Polytechnique*, XIVe Cahier.

Dans sa *Theory of systems of rays*, Hamilton a, le premier, étudié d'une façon générale les pinceaux quelconques de rayons lumineux : il a fait connaître des points et des plans relatifs à ces pinceaux et qui sont toujours réels.

M. Kummer, dans un beau Mémoire de Géométrie analytique, intitulé : *Théorie générale des systèmes rectilignes*, a approfondi la théorie de Hamilton et l'a complétée en quelques points.

Enfin, relativement aux pinceaux quelconques, je rappellerai que j'en ai donné une *Théorie géométrique*. Pour établir cette théorie, j'ai considéré l'élément de surface réglée, que j'appelle *surface élémentaire* du pinceau, constitué par le rayon du pinceau et un rayon qui lui est infiniment voisin. Autour d'un rayon, il y a une infinité de surfaces élémentaires.

Les points trouvés par Hamilton, et qui sont toujours réels sur le rayon d'un pinceau, sont les deux extrémités du segment sur lequel sont situés les points centraux de toutes les surfaces élémentaires du pinceau. En ces deux points appelés *points limites*, les plans centraux correspondants des surfaces élémentaires sont appelés *plans principaux*. Ces plans principaux sont rectangulaires.

Dans le cas particulier où les rayons lumineux forment un pinceau de normales à une surface, les surfaces élémentaires de ce pinceau sont des éléments de normales à cette surface, les points limites se confondent avec les foyers du rayon du pinceau et sont aussi les centres de courbure principaux de cette surface; enfin celle-ci a, pour plans de ses sections principales, les plans principaux du pinceau qui sont confondus ici avec les plans focaux.

Restant dans le cas particulier où les rayons lumineux sortent normalement d'une surface, Sturm, dans son Mémoire *Sur l'Optique* (1), a étudié analytiquement les éléments de courbure des surfaces auxquelles ces rayons sont normaux après leur réfraction et a trouvé des formules intéressantes et de beaux théorèmes.

Dans son Mémoire sur la *Théorie générale des surfaces* (2), revenant sur le même sujet, toujours dans le cas des rayons lumineux nor-

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. III.

(2) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. IX.

maux à une surface, M. Bertrand, par des considérations de Géométrie infinitésimale, a retrouvé les formules dues à Sturm et en a ajouté une nouvelle. Ces formules permettent de calculer les éléments des surfaces caustiques.

Enfin, en 1845, Sturm a traité de nouveau analytiquement le même problème à la fin de son Mémoire *Sur la vision* (1).

Ainsi, pour le seul cas particulier de l'espace qui eût été traité, on avait trouvé des formules, mais pas de construction effective. Tel était, à ma connaissance, l'état de la question lorsque j'ai commencé à l'étudier (2).

La solution géométrique que j'apporte aujourd'hui est complète et aboutit à plusieurs *constructions planes* des éléments des surfaces caustiques, et cela, je le répète, dans le cas le plus général. Les solutions de nombreuses questions ne sont vraiment achevées que lorsque l'on fait connaître les constructions qu'elles exigent; elles ne peuvent attendre cet achèvement que de la Géométrie. La question d'Optique résolue dans ce travail en est un exemple.

DU POINT REPRÉSENTATIF D'UN ÉLÉMENT DE SURFACE RÉGLÉE.

Dans mon Mémoire *Sur les pinceaux de droites* (3) j'ai montré comment, au moyen d'une droite auxiliaire, on peut représenter la loi de variation des plans tangents à une surface réglée pour les différents points d'une génératrice de cette surface. Cette droite auxiliaire est relative à un point pris comme origine sur cette génératrice et change en même temps que ce point; mais *toutes les droites auxiliaires relatives aux différents points d'une génératrice passent par un même point.*

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1er semestre 1845. M. Ribaucour s'est aussi occupé du même cas particulier, mais on ne connaît de son travail que l'annonce qu'il en a faite en 1873 dans sa Notice sur ses travaux mathématiques.

(2) Je n'ai pas parlé des travaux de Gergonne, Quetelet, Sarrus, de La Rive, Timmermans, etc., qui ne se rattachent pas directement au problème que j'avais en vue. Un travail sur les courbes et surfaces caustiques, analogue à la belle dissertation du Dr O. Böklen sur la surface de l'onde (Reutlingen, 1881) serait utile aussi bien aux physiciens qu'aux géomètres.

(3) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XVII, 1872.

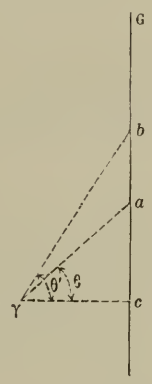
Ces droites auxiliaires sont respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent ce point aux différents points pris comme origine sur la génératrice.

Une génératrice d'une surface réglée étant donnée, il suffit donc de lui adjoindre ce seul point pour pouvoir déterminer les plans tangents à la surface réglée. Le point qu'il faut ainsi adjoindre à une génératrice, je l'appelle *point représentatif* de l'élément de la surface réglée le long de cette droite.

Avant d'en faire usage, je vais montrer comment on y arrive directement, ce qui dispensera de recourir à des Mémoires antérieurs.

Soient (G) une surface gauche et G (*fig.* 1) une de ses génératrices

Fig. 1.



que, pour l'explication, je suppose placée verticalement. Menons un plan par G et faisons-le tourner autour de cette droite de façon que sa trace sur un plan horizontal de projection tourne dans le sens direct de rotation d'une droite sur un plan. Ce plan touche (G) successivement en des points qui, je suppose, s'éloignent du plan horizontal, c'est-à-dire vont en s'élevant sur G.

Appelons c le point central de (G) sur G, k le paramètre de distribution des plans tangents à (G) pour G, a un point distant de c de la longueur l, et θ l'angle que le plan tangent en a fait avec le plan central; on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{l}{k}.$$

Sur un plan quelconque mené par G, et que nous prenons pour plan de la figure, élevons au point c une perpendiculaire à G. Portons sur cette droite le segment $c\gamma$ égal à k et menons la droite γa.

Dans le triangle $c\gamma a$ on a

$$\operatorname{tang} c\gamma a = \frac{l}{k}.$$

En rapprochant cette égalité de la précédente, on voit que l'angle $c\gamma a$ est égal à θ.

De même, pour un autre point b de G, on a l'angle $c\gamma b$ qui représente l'angle θ' que le plan tangent en b à (G) fait avec le plan central.

L'angle $a\gamma b$, qui est égal à $\theta' - \theta$, est alors égal à l'angle que font entre eux les plans tangents en a et b. On a ainsi ce théorème connu :

L'angle sous lequel on voit du point γ un segment ab de G *est égal à l'angle que font entre eux les plans tangents à* (G) *aux points a et b.*

Remarquons que la droite du plan de la figure qui, tournant autour du point γ, passe successivement par les points a, b, ..., tourne dans le sens direct comme la trace horizontale du plan qui touche successivement (G) aux points a, b, ... [1]. La figure formée par les droites γa, γb peut donc servir à représenter la figure formée par les traces horizontales des plans tangents en a, b, ...

Si le plan mené par G, tournant toujours dans le même sens, touche successivement G en des points qui se rapprochent du plan horizontal de projection, on a encore la représentation de la figure formée par les traces horizontales de ce plan dans ses diverses positions, à la condition de placer γ, par rapport à G, symétriquement à sa première position.

Le point γ est le point représentatif de l'élément de (G) *le long de* G.

---

[1] Le plan de la figure est un plan de front devant le spectateur et le plan horizontal est au-dessous de ce spectateur.

D'après ce qui précède, on doit le choisir sur la perpendiculaire élevée à G du point central à une distance k de ce point, de façon que les droites qui vont du point représentatif successivement aux différents points de G représentent, y compris le sens de la rotation, la figure formée par les traces du plan qui touche (G) successivement en ces différents points.

La connaissance des plans tangents à (G) en trois points de G suffit pour déterminer le point représentatif relatif à cette droite et par suite pour déterminer tous les plans tangents qui passent par G.

Afin de familiariser le lecteur avec l'emploi du *point représentatif*, je vais donner, à l'aide de ce point, des démonstrations nouvelles de propriétés relatives à la théorie de la courbure des surfaces et utiles d'ailleurs par la suite.

EMPLOI DU POINT REPRÉSENTATIF DANS LA THÉORIE DE LA COURBURE DES SURFACES.

Je vais exposer cette théorie en supposant préalablement démontré le théorème suivant :

A partir d'un point o sur une surface (S), *on trace des courbes quelconques. Les normalies à* (S), *qui ont ces courbes pour directrices, sont tangentes entre elles en deux points de la normale* N *en o à* (S). *Leurs plans tangents communs en ces points sont rectangulaires.*

On en déduit facilement le théorème de Meusnier et l'on voit aussi que :

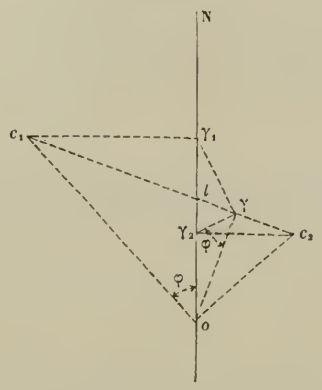
Si l'on considère une normalie qui a pour directrice une courbe E, *tracée sur* S *à partir du point o, le plan normal à* (S), *qui est tangent en o à* E, *est normal à cette normalie en un point qui est le centre de courbure de la section qu'il détermine dans* (S).

C'est en partant de là que je vais d'abord résoudre, au moyen d'un point représentatif, le problème suivant :

Construire le rayon de courbure de la section faite dans une surface (S) *par un plan qui lui est normal.*

Soient toujours E une courbe tracée sur (S), o un point de cette courbe, N la normale en ce point à S. Prenons pour plan de la figure le plan normal à (S) qui est tangent à E en o, c'est-à-dire le plan qui détermine la section pour laquelle nous cherchons le centre de courbure correspondant au point o. Appliquons le théorème précédent; pour cela, considérons la normalie (N) à (S) dont la directrice est E. Appelons γ_1 et γ_2 (*fig.* 2) les points de N où se touchent toutes les normalies à S dont les directrices partent du point o. Soit γ le point re-

Fig. 2.



présentatif de cette normalie pour la génératrice N; ce point est tel que l'angle $\gamma_1\gamma\gamma_2$ est droit, puisque les plans tangents à (N) aux points γ_1, γ_2 sont rectangulaires. Il suffit d'élever en γ la perpendiculaire γl à γo pour avoir en l sur N le point de contact avec (N) du plan mené par N perpendiculairement au plan tangent en o à cette normalie. Ce point l est alors le centre de courbure demandé.

Lorsque l'on considère les différentes normalies à (S) qui contiennent N, on a des points représentatifs, tels que γ, qui sont toujours sur la circonférence décrite sur $\gamma_1\gamma_2$ comme diamètre. La construction précédente, lorsqu'on emploie ces différents points représentatifs, montre comment varient les rayons de courbure, tels que ol, c'est-à-dire les rayons de courbure des différentes sections faites dans (S) par des plans menés par N. Elle montre que le rayon de courbure est maximum lorsqu'il est égal à $o\gamma_1$, et minimum lorsqu'il est égal à $o\gamma_2$. Les points γ_1, γ_2 sont les centres de courbure principaux de (S) pour

le point o et les plans, dont les sections ont ces points pour centres de courbure, sont les plans des sections principales de (S).

Remarques. — Le théorème relatif aux normalies, rappelé précédemment, peut maintenant être énoncé ainsi :

Les normalies à (S), *dont les directrices partent d'un même point* o, *sont tangentes entre elles aux centres de courbure principaux de* (S) *relatifs à ce point et leurs plans tangents communs, qui sont rectangulaires, sont les plans des sections principales de* (S) *en* o.

Le plan de la section principale, dont le centre de courbure est γ_1, est le plan tangent commun aux normalies au point γ_2 et de même pour l'autre plan de la section principale.

La section normale à (S), dont le centre de courbure est l, fait avec le plan de la section principale, dont le centre de courbure est γ_1, un angle égal à $\gamma_2\gamma o$.

Revenons à la construction du centre de courbure l. Nous venons de remarquer que l'angle $\gamma_2\gamma o$ est égal à l'angle que le plan de la section normale dont le centre de courbure est l fait avec le plan de la section principale dont le centre de courbure est γ_1. Supposons connu cet angle, que nous appellerons φ, ainsi que les rayons de courbure principaux $o\gamma_1$, $o\gamma_2$. Ces éléments suffisent pour construire l. On peut, en effet, construire ce point après avoir déterminé γ à la rencontre de la circonférence décrite sur $\gamma_1\gamma_2$ comme diamètre et du segment capable de l'angle φ décrit sur $o\gamma_2$.

Modifions cette construction. Prolongeons γl jusqu'aux points c_1, c_2, où cette droite rencontre les perpendiculaires élevées des points γ_1, γ_2 à N. Les quatre points c_1, γ_1, γ, o sont sur la circonférence décrite sur $c_1 o$ comme diamètre, et les points o, γ_2, γ, c_2 sont sur la circonférence décrite sur oc_2 comme diamètre. Au moyen de ces circonférences on voit que l'angle $\gamma_1 oc_1$ est égal à l'angle $\gamma_1\gamma c_1$, et que l'angle $c_2 o\gamma_2$ est égal à l'angle $l\gamma\gamma_2$. Il résulte de là que l'angle $c_2 oc_1$ est droit, et, en outre, que l'angle $\gamma_1 oc_1$ est égal à φ. On a alors la construction suivante pour déterminer le centre de courbure d'une section normale.

On donne N, *les centres de courbure principaux* γ_1, γ_2 *et l'angle* φ *que le plan de la section normale, dont on cherche le rayon de courbure, fait avec le plan de la section principale dont le centre de courbure est* γ_1. *On mène la droite* oc_1 *qui fait avec* N *l'angle* φ, *et l'on élève à cette droite la perpendiculaire* oc_2. *Les droites* oc_1, oc_2 *rencontrent en* c_1 *et* c_2 *les perpendiculaires élevées des points* γ_1, γ_2 *à* N : *la droite* c_1c_2 *coupe* N *au centre de courbure* l *cherché.*

Remarque. — Le point représentatif γ est au pied de la perpendiculaire abaissée du point o sur la droite c_1c_2.

Relation d'Euler. — En partant de la construction que nous venons de trouver, il est facile d'établir la relation d'Euler. On y arrive aussi de la manière suivante en faisant usage du point représentatif γ. On a

$$\text{aire}\,\gamma_1\gamma\gamma_2 = \text{aire}\,\gamma_1\gamma l + \text{aire}\, l\gamma\gamma_2;$$

par suite,

$$\gamma\gamma_1 \times \gamma\gamma_2 = \gamma\gamma_1 \times \gamma l \cos\varphi + \gamma l \times \gamma\gamma_2 \sin\varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{\gamma l} = \frac{\cos\varphi}{\gamma\gamma_2} + \frac{\sin\varphi}{\gamma\gamma_1}.$$

Désignons $o\gamma$ par ρ, $\gamma\gamma_1$ par R_1 et $\gamma\gamma_2$ par R_2. On a

$$\gamma l = \rho \sin\gamma ol, \qquad \frac{\sin\gamma ol}{\gamma\gamma_1} = \frac{\cos\varphi}{R_1}, \qquad \frac{\sin\gamma ol}{\gamma\gamma_2} = \frac{\sin\varphi}{R_2};$$

substituant dans la relation précédente, il vient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2},$$

qui est la relation d'Euler.

Remarque. — La démonstration dont nous venons de faire usage montre que, si l'on a un angle droit $\gamma_1\gamma\gamma_2$, dont le côté $\gamma\gamma_2$ fait avec une droite γo un angle φ, on a

$$\frac{1}{ol} = \frac{\cos^2\varphi}{o\gamma_1} + \frac{\sin^2\varphi}{o\gamma_2}.$$

Indicatrice. — Remplaçons, dans la relation d'Euler, ρ par $\lambda\overline{d}^2$, R_1 par $\lambda\overline{a}^2$, R_2 par $\lambda\overline{b}^2$ et supprimons le facteur λ; il vient

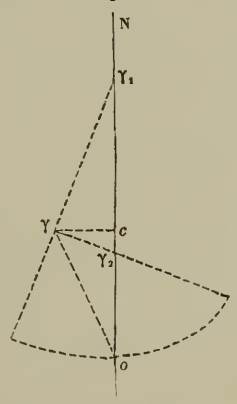
$$\frac{1}{\overline{d}^2} = \frac{\cos^2\varphi}{\overline{a}^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\overline{b}^2},$$

équation en coordonnées polaires d'une conique dont les demi-axes sont $\overline{a}$ et $\overline{b}$.

Construisons cette courbe sur le plan tangent (T) à (S) au point o, de façon que son centre soit en ce point et que son grand axe soit dans le plan de la section principale dont le centre de courbure est γ_1. Le rayon de courbure d'une section normale à (S) au point o est alors proportionnel au carré du diamètre de cette conique qui est dans ce plan. Cette conique est l'indicatrice de Dupin.

Théorème. — *La tangente en un point o de la directrice d'une normalie à* (S) *et la trace du plan central de cette normalie sur le plan* (T), *tangent en o à* (S), *sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice de* (S) *en o.*

Fig. 3.



La normalie a, je suppose (*fig.* 3), pour point représentatif le point γ. Le pied c de la perpendiculaire abaissée de γ sur N est le point central de cette normalie pour cette génératrice. Les droites $\gamma\gamma_1$, $\gamma\gamma_2$, γc, γo forment une figure égale à la figure qu'on obtient en prenant sur (T) les axes de l'indicatrice, la trace du plan central et la tangente en o à

la directrice de la normalie. Imaginons alors que, au lieu de tracer l'indicatrice de (S) sur (T), on trace cette courbe sur le plan de la figure en lui donnant des dimensions telles qu'elle passe par le point o, son centre étant en γ et son grand axe dirigé suivant $\gamma\gamma_2$. Appelons toujours $\bar{a}$ et $\bar{b}$ les demi-axes de cette conique.

On a, puisque c'est une indicatrice,

$$\frac{o\gamma_1}{o\gamma_2} = \frac{\bar{a}^2}{\bar{b}^2}.$$

Cette relation montre que N est la normale en o à cette conique; par suite, γc, qui lui est perpendiculaire, est parallèle à la tangente en o à cette courbe.

Les droites γc et γo sont donc deux diamètres conjugués de l'indicatrice, et le théorème est démontré.

Ce théorème, comme l'on sait, permet de démontrer très facilement le théorème des tangentes conjuguées.

Rayon de courbure de la courbe de contour apparent d'une surface. — On va voir encore combien l'emploi du point représentatif rend facile la détermination de ce rayon de courbure.

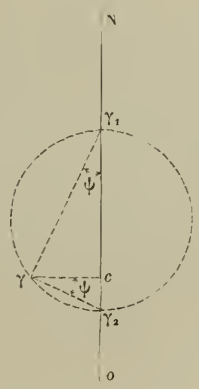
Circonscrivons à la surface donnée (S) un cylindre dont les génératrices soient perpendiculaires au plan de projection. Appelons E la courbe de contact de ce cylindre et de (S) et E′ la trace de ce cylindre sur le plan de projection. Comme la courbe E′ reste la même à quelque distance que l'on transporte ce plan de projection, parallèlement à lui-même, faisons passer ce plan par le point o de E. C'est pour ce point o que nous allons chercher le centre de courbure de E′, qui est la ligne de contour apparent de (S) sur le plan de projection. Considérons la normalie (N) à (S), qui a pour directrice E. Les génératrices de cette normalie sont parallèles au plan de projection et se projettent suivant les normales à E′.

Prenons la génératrice N_1 de (N), qui est infiniment voisine de N, et le pied c sur N de la perpendiculaire commune à cette droite et à N_1. Le point c, qui n'est autre que le point de rencontre de deux normales à E′, qui sont infiniment voisines, est le centre de courbure demandé.

On voit ainsi que ce centre de courbure est le point central de (N) sur N, et que le plan central relatif à cette droite est perpendiculaire au plan de projection.

Soient (*fig.* 4) N la normale en o à (S), γ_1, γ_2 les centres de cour-

Fig. 4.



bure principaux, γ le point représentatif de l'élément de (N) le long de N et c le point central situé sur N.

L'angle $\gamma_2\gamma c$ est l'angle compris entre le grand axe de l'indicatrice en o et le plan central, c'est-à-dire que c'est l'angle des projetantes avec ce grand axe.

Désignons-le par ψ. On voit sur la figure que $\gamma\gamma_1 o$ est égal à ψ; par suite, on a cette construction : *On mène $\gamma_1\gamma$, de façon que l'angle $\gamma\gamma_1 o$ soit égal à ψ. Cette droite rencontre en un point γ la circonférence décrite sur $\gamma_1\gamma_2$ comme diamètre : la projection de γ sur* N *est le centre de courbure cherché.*

On a

$$\gamma_2 c = \gamma c \operatorname{tang}\psi = c\gamma_1 \operatorname{tang}^2\psi.$$

Désignons par R le rayon de courbure oc; cette relation peut s'écrire

$$R - R_2 = (R_1 - R)\operatorname{tang}^2\psi$$

ou, en développant,

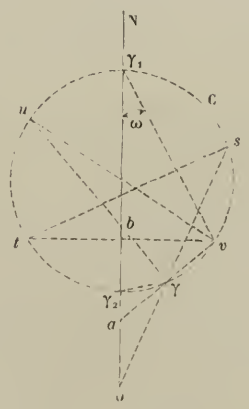
$$R = R_1 \sin^2\psi + R_2 \cos^2\psi.$$

Telle est la relation qui lie le rayon de courbure de la courbe de contour apparent aux éléments de courbure de (S).

REPRÉSENTATION PLANE D'UN PINCEAU.

Les différents éléments de normalies qui appartiennent à un pinceau de normales à une surface (S) peuvent être représentés chacun par leur point représentatif, et, comme de chacun de ces points on doit voir sous un angle droit le segment compris entre les centres de courbure principaux γ_1, γ_2 de (S), ces points représentatifs appartiennent à la circonférence C décrite sur le segment $\gamma_1\gamma_2$ comme diamètre. Pour fixer la position du pinceau par rapport à un plan fixe, mené par la normale N (*fig.* 5), que nous prenons pour plan de la figure, sup-

Fig. 5.



posons donné l'angle ω dont il faut faire tourner le plan tangent commun en γ_2 aux normalies pour amener ce plan à coïncider avec le plan fixe de la figure. Menons la droite $\gamma_1 c$ qui fait avec $\gamma_1\gamma_2$ cet angle ω. Une normalie, qui touche le plan de la figure au point arbitraire a, a pour point représentatif le point de rencontre γ de ca avec C, car il résulte bien de cette construction que l'angle $\gamma_2\gamma a$ est égal à ω. Le point c, qui est fixe sur C, permet donc d'avoir immédiatement le point représentatif de l'élément de normalie qui touche le plan de la figure en un point donné de N.

Il suffit donc de la circonférence C, *dont le centre est sur* N, *et du point* v *marqué sur* C *pour représenter de forme et de position le pinceau de normales* (¹).

Reprenons l'élément de normalie représenté par γ; menons la droite qui joint le point o de N au point γ : elle coupe en s la circonférence C.

Joignons le point s au point t, situé à la rencontre de C et de la perpendiculaire abaissée de v sur N. L'angle vts est égal à l'angle $a\gamma o$; par conséquent il est égal à l'angle que le plan tangent en o à la normalie fait avec le plan de la figure. Le point t, comme le point v, est fixe sur C et peut être employé pour tous les éléments de normalies du pinceau de normales.

Remarquons que les droites qui partent du point t, telles que ts, et relatives aux différents éléments de normalies du pinceau forment une figure qui est égale à la figure formée, sur un plan mené en o perpendiculairement à N, par les traces des plans tangents en o à tous ces éléments de normalies.

Il y a encore un point fixe de C dont nous ferons usage, c'est le point u de cette circonférence qui est diamétralement opposé à v. La droite, qui joint ce point u au point représentatif γ d'un élément de normalie, coupe N au point b où cet élément est normal au plan de la figure, car l'angle $b\gamma a$ est droit.

Tout ce que je viens d'expliquer pour un pinceau de normales s'étend à un pinceau quelconque en vertu des propriétés de ce pinceau (²). Un pareil pinceau est toujours représenté par une circonférence sur laquelle on marque un point fixe. Ce point dépend de l'orientation du pinceau par rapport à un plan fixe mené par le rayon du pinceau. Pour fixer cette orientation, on se donne l'angle dont il faut faire tourner l'un des plans principaux du pinceau pour amener ce plan à coïncider avec le plan fixe.

(¹) J'ai déjà donné ce mode de représentation dans une Communication faite à l'Académie des Sciences le 9 juin 1879.

(²) *Voir* mon Mémoire *Sur les pinceaux de droites*.

PREMIÈRE CONSTRUCTION PLANE DES ÉLÉMENTS DES SURFACES CAUSTIQUES.

Cette construction est obtenue en appliquant la méthode générale dont j'ai déjà fait usage pour déterminer les éléments de courbure de la surface de l'onde [1]. Cette méthode consiste, pour l'étude des transformations des pinceaux, à rechercher la correspondance qui existe entre leurs représentations planes [2].

Voici l'énoncé du problème d'Optique que je vais résoudre :

Étant donnés les éléments d'un pinceau quelconque de rayons lumineux incidents et les éléments de courbure de la surface séparatrice des milieux traversés par ces rayons, déterminer les éléments du pinceau formé par ces rayons après leur réfraction.

Appelons (S) la surface séparatrice des milieux.

Un rayon incident I rencontre (S) au point o, et il est réfracté suivant le rayon R. Le plan des droites I et R contient la droite N, normale en o à (S), et l'on a, quel que soit le rayon incident,

$$\frac{\sin(\mathrm{I}, \mathrm{N})}{\sin(\mathrm{R}, \mathrm{N})} = \text{const.}$$

Cette constante est l'indice de réfraction que nous désignerons par λ. Nous désignerons par i l'angle (I, N) et par r l'angle (R, N).

Prenons pour plan de la *fig.* 6 le plan des trois droites I, R, N. Représentons le pinceau [N] des normales à (S) dont les pieds sont aux points infiniment voisins de o, par la circonférence C sur laquelle est marqué le point c. Représentons de même par C′ et c' le pinceau [I] des rayons lumineux incidents.

---

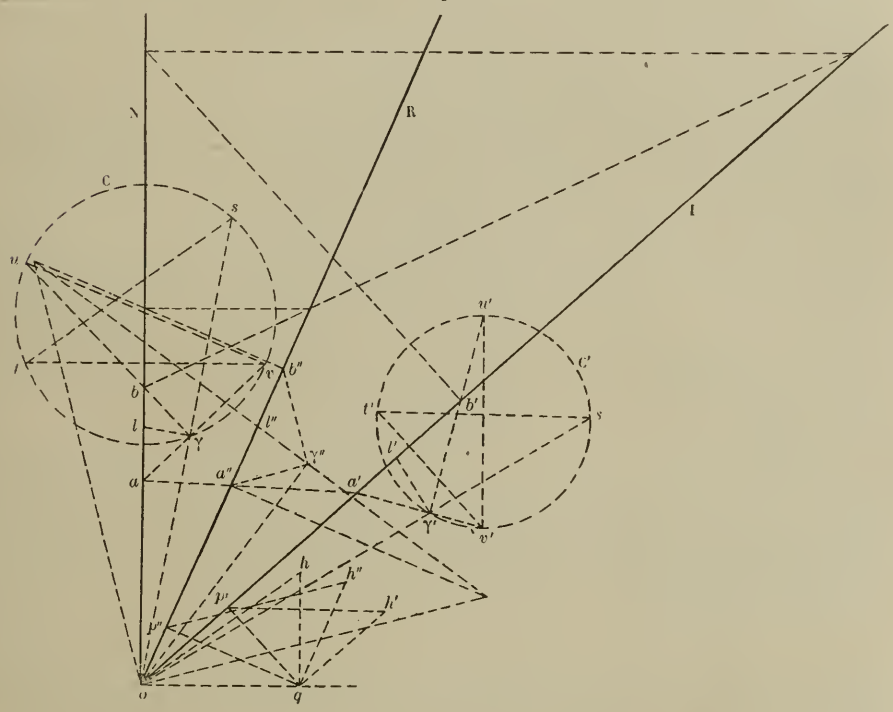
(1) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances des 2, 9 et 16 juin 1879, ainsi que le Volume publié en Italie, par MM. Cremona et Beltrami en mémoire de Chelini, sous le titre de *Collectanea mathematica*.

(2) Elle s'étend naturellement à toutes les transformations des figures de l'espace dont on connaîtrait la représentation plane.

Pour résoudre notre problème, nous nous proposons de construire, pour le pinceau [R] des rayons réfractés, la circonférence C'' et le point c'' qui le représentent.

Appelons (I) une surface élémentaire du pinceau [I]. A cette surface correspond un élément de normalie (N) et une surface élémentaire (R). Ce que nous allons d'abord chercher, c'est le point représentatif γ'' de (R) qui correspond au point représentatif γ' de (I).

Fig. 6.



Pour construire γ'', déterminons en trois points de R les plans tangents à la surface élémentaire (R).

Ces trois points sont le point o, le point pour lequel (R) est tangent au plan de la figure, et le point pour lequel cette surface élémentaire est normale au plan de la figure.

Nous conservons pour le pinceau [N] les notations employées précédemment lorsqu'il s'est agi de la représentation plane d'un pinceau.

Pour le pinceau [I], nous prenons les mêmes notations avec des lettres marquées d'un accent, et enfin, pour le pinceau [R], nous prenons encore les mêmes lettres marquées de deux accents.

La surface élémentaire (I) étant représentée par le point γ', menons la droite $o\gamma'$; elle coupe C′ au point s' : l'angle $v't's'$ est alors égal à l'angle que le plan tangent en o à (I) fait avec le plan de la figure.

Cherchons tout de suite les angles analogues pour (N) et (R).

D'un point arbitraire q de la perpendiculaire élevée en o à N, abaissons sur I et R les perpendiculaires qp', qp''. Du point p' menons $p'h'$ parallèlement à $t's'$. Cette droite rencontre en h' la perpendiculaire qh' à qp', et le segment qh' est égal à la portion de la perpendiculaire menée du point q au plan de la figure et comprise entre ce plan et le plan tangent en o à (I). Il suffit maintenant de porter sur la perpendiculaire qh à oq et sur la perpendiculaire qh'' à qp'' des segments égaux à qh' *pour avoir les angles* qoh, $qp''h''$ *que les plans tangents en* o *à* (N) *et à* (R) *font avec le plan de la figure.*

Appelons I_1 le rayon lumineux infiniment voisin de I qui détermine avec ce rayon la surface élémentaire (I). La droite I_1 rencontre (S) au point o_1, d'où partent la normale N_1 à (S) et le rayon réfracté R_1. Les trois droites I_1, N_1, R_1 sont dans un même plan qui est la nouvelle position du plan (I, R, N) lorsque le point o est venu en o_1.

Le déplacement du plan (I, R, N) donne lieu à une caractéristique qui est la droite d'intersection de ce plan et du plan (I_1, R_1, N_1). Cette caractéristique contient les points a, a', a'' où le plan de la figure touche les surfaces élémentaires (N), (I), (R) [1].

On voit ainsi que :

Les surfaces élémentaires correspondantes touchent le plan de la figure en des points qui appartiennent à une même droite.

La surface (I) touche le plan de la figure au point a' où $v'\gamma'$ rencontre I. Pour avoir le point a, où la normalie (N) touche ce même plan, menons du point t la droite ts parallèlement à oh (afin de construire l'angle vts égal à l'angle que le plan tangent en o à N fait avec

[1] *Voir* mon *Cours de Géométrie descriptive*, 1re édition, p. 277.

le plan de la figure). Joignons le point s au point o. Cette droite rencontre C au point γ qui est le point représentatif de l'élément de normalie (N). Cette construction est, en effet, la construction inverse de celle qui donnerait l'angle cts si le point γ était donné. Ayant construit le point γ, on mène la droite $c\gamma$: elle coupe la droite N au point a demandé.

D'après le théorème qui vient d'être démontré, la droite aa' rencontre R au point a'' où (R) touche le plan de la figure. *Nous avons ainsi construit sur* R *un point* a'', *qui est le deuxième pour lequel nous connaissons le plan tangent à* (R). *Le point* o *était le premier pour lequel on connaissait le plan tangent à cette surface.*

Occupons-nous maintenant des points où les surfaces élémentaires correspondantes (N), (I), (R) sont normales au plan de la figure.

Le point où (I) est normal au plan de la figure est le point b', où la droite $\gamma' u'$ rencontre I. De même le point où (N) est normal au plan de la figure est le point b, où la droite γu rencontre N. Connaissant b et b', nous allons déterminer le point b'', où (R) est normal au plan de la figure.

Les droites I_1, N_1, R_1 font entre elles des angles tels que

$$\frac{\sin(I_1, N_1)}{\sin(R_1, N_1)} = \lambda.$$

Les projections sur le plan de la figure des angles $(I_1 N_1)$, $(R_1 N_1)$ ne différant de ces angles que d'infiniment petits d'ordre supérieur, on a, entre les sinus des angles obtenus ainsi en projection, le même rapport λ. Les points b, b', b'' sont, du reste, les points où les droites I, R, N sont respectivement rencontrées par les projections de I_1, R_1, N_1. En considérant ces projections sur le plan de la figure comme de nouvelles positions de I, N, R, on peut alors supposer que ces trois droites se déplacent sur le plan de la figure pour occuper ces nouvelles positions, de façon que o se déplace normalement à N, tandis que ces droites touchent leurs enveloppes respectivement en b, b', b''; le rapport des sinus des angles qu'elles comprennent restant égal à λ. Les points b, b', b'' sont alors liés par la construction plane suivante :

Sur le plan de la figure, on élève en b' *une perpendiculaire à* I.

Du point où cette droite coupe N, *on élève une perpendiculaire à cette droite* N. *Cette perpendiculaire rencontre* I *en un point que l'on joint au point b. Cette droite coupe* R *en un point que l'on projette sur* N : *le point ainsi obtenu étant projeté sur* R *donne le point* b'' (¹).

Nous connaissons donc, pour la surface élémentaire (R) :

1° Le point a'' où elle touche le plan de la figure;

2° Le point b'' où elle lui est normale;

3° L'angle $qp''h''$ que le plan tangent en o à cette surface fait avec le plan de la figure. Nous pouvons alors construire le point représentatif γ'' de la surface élémentaire (R).

Ce point γ'' doit être sur la circonférence décrite sur $a''b''$ comme diamètre, puisque les plans tangents en ces points à (R) sont rectangulaires.

Le point γ'' doit être aussi sur le segment capable de l'angle $qp''h''$ décrit sur oa''. Mais nous avons vu précédemment, à propos de la courbure des surfaces, comment on détermine linéairement l'intersection de ces deux circonférences.

C'est cette construction que nous employons pour déterminer le point γ'' :

Du point o, on mène une parallèle à $p''h''$ *et une perpendiculaire à cette droite. Ces deux droites rencontrent respectivement les perpendiculaires à* R *élevées des points* a'' *et* b'' : *la projection du point o sur la droite qui joint ces deux points donne le point* γ''.

En partant du point représentatif γ' d'une surface élémentaire du pinceau [I], nous sommes arrivés au point représentatif γ'' de la surface élémentaire correspondante du pinceau [R]. Une autre surface élémentaire de [I] dont le point représentatif est γ'_1 (²) donnera de la même manière le point représentatif γ''_1 de la surface élémentaire qui lui correspond dans le pinceau [R]. La connaissance des deux points

(¹) *Loc. cit.*, p. 207.

(²) Pour ne pas compliquer la figure, nous n'avons pas indiqué les points γ'_1, γ''_1, v'', u'', ni la circonférence C''.

γ'' et γ''_1 suffit pour déterminer la circonférence C'' et le point v'' qui représentent le pinceau réfracté [R]. Voici comment : on mène la droite $a''\gamma''$ et la droite analogue $a''_1\gamma''_1$; ces deux droites se coupent au point v''. On mène la droite $b''\gamma''$ et la droite analogue $b''_1\gamma''_1$: ces deux droites se coupent au point u''.

La circonférence décrite sur $u''v''$ comme diamètre est la circonférence C'' relative au pinceau [R] *et le point v'' de cette courbe permet d'avoir l'orientation du pinceau.*

La connaissance de cette circonférence C'' entraîne la connaissance des éléments du pinceau [R]. Ainsi, les points de rencontre de C'' et de R sont les foyers sur ce rayon, et l'angle, sous lequel on voit d'un point de C'' le segment compris entre ces deux foyers, est égal à l'angle compris entre les plans focaux. Ces foyers et cet angle sont les éléments des surfaces caustiques relatives à R. Nous avons donc résolu le problème d'Optique énoncé précédemment.

La solution que nous venons d'exposer est absolument générale, puisque nous n'avons fait aucune hypothèse relativement au pinceau [I] en le représentant par une circonférence de cercle. Nous verrons plus loin que la construction plane précédente permet de trouver que, lorsque le centre de cette circonférence est sur I, c'est-à-dire lorsque [I] est un pinceau de normales, il en est de même du pinceau [R], parce qu'alors le centre de la circonférence C'' est sur le rayon R. Nous retrouverons ainsi le théorème de Malus et de Dupin, sur lequel nous n'avons pas eu besoin de nous appuyer.

Remarques (¹). — Lorsque le rayon lumineux I varie de position, il en est de même de R et par suite du plan (I, R, N). Ce plan pour un déplacement de I a pour caractéristique une droite telle que $aa'a''$. Mais, lorsqu'on déplace I de toutes les manières possibles autour de la première position de ce rayon, le plan (I, R, N) reste tangent à une surface, et chacun des déplacements de ce plan donne lieu à une caractéristique qui passe par le point de contact de ce plan avec cette sur-

(¹) Ces remarques ne sont pas utiles pour la suite.

face. Donc : *Toutes les droites, telles que a, a', a'', passent par un même point.*

Prenons quatre surfaces élémentaires du pinceau [I], chacune d'elles touche le plan de la figure en un point tel que a'. Joignons ces quatre points au point c'. Ces droites rencontrent C′ en des points tels que γ. Joignons ces points au point u'. Ces quatre droites déterminent sur I quatre points tels que b'. Il résulte de cette construction que l'on a deux faisceaux de droites dont les sommets sont u' et c' et dont les droites correspondantes se coupent sur C′. Les rapports anharmoniques de ces deux faisceaux sont alors égaux et, par suite : *les rapports anharmoniques de quatre points, tels que b', sont égaux aux rapports anharmoniques de quatre points tels que a'.*

Mais le théorème précédent montre que le rapport anharmonique des points, tels que a' sur I, est égal au rapport anharmonique des points correspondants tels que a sur N et a'' sur R; donc il en est de même pour les points tels que b sur N et b'' sur R.

Ainsi : *Sur* I, N, R *les rapports anharmoniques des points correspondants, tels que b, b', b'', sont égaux entre eux.*

Comme le point o peut être à la fois un point tel que b, b', b'', nous voyons que :

Les droites telles que bb' passent par un même point et qu'il en est de même pour les droites telles que $b'b''$ et pour les droites telles que bb''.

Appelons α le point fixe relatif aux droites bb', β le point fixe relatif aux droites $b'b''$ et enfin δ le point fixe relatif aux droites bb'' :

Les trois points α, β, δ sont en ligne droite, car les triangles tels que $bb'b''$ ont toujours leurs sommets sur les droites I, N, R qui concourent au point o.

La droite $\beta\alpha$ coupe N, I, R *en des points tels que b, b', b'',* comme il est facile de le voir. Si l'on applique à ces trois points particuliers la construction linéaire qui les relie, on voit tout de suite que les perpendiculaires à I et à R, élevées respectivement des points particuliers tels que b' et b'', concourent en un point de la perpendiculaire élevée en o à N.

Par suite, si l'on projette un point quelconque de oq sur I et R, la droite qui joint ces points est parallèle à $\alpha\beta\delta$. Donc :

La droite $\alpha\beta\delta$ est parallèle à $p'p''$.

Si le point tel que b' est sur I *la projection d'un point tel que b sur* N, *le point b'' correspondant est aussi la projection de ce point b sur* R.

Cela résulte immédiatement de la construction qui lie les points tels que b, b', b''.

On peut remarquer que la droite qui joint les points particuliers, tels que b' et b'' de l'énoncé précédent, est perpendiculaire à la droite $\alpha\beta\delta$.

PREMIÈRE MODIFICATION DE LA CONSTRUCTION PRÉCÉDENTE.

Les plans tangents en o aux surfaces élémentaires correspondantes (I), (R), (N) se coupent suivant une même droite du plan (T), tangent en o à (S).

Cette remarque va me permettre de modifier la construction précédente. Pour cela je vais généraliser le théorème d'où nous sommes partis précédemment, et, au lieu de prendre pour une génératrice d'une surface réglée les traces des plans tangents à cette surface sur un plan perpendiculaire à cette génératrice, je vais prendre les traces des plans tangents sur un plan arbitraire.

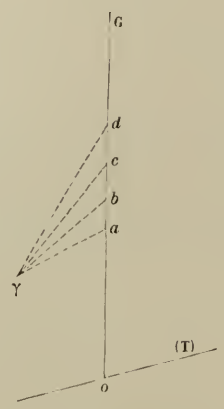
Prenons pour plan de la *fig.* 7 le plan qui projette orthogonalement la génératrice G de la surface réglée (G) sur un plan fixe quelconque (T) [1]. Soient a, b, c, d quatre points arbitraires sur G et (A), (B), (C), (D) les plans tangents en ces points à (G). Construisons sur ab un segment capable de l'angle compris entre les traces de (A) et de (B) sur (T), et sur bc décrivons un segment capable de l'angle analogue relatif à (B) et (C); ces deux circonférences se coupent en b et en un autre point γ. En vertu d'un théorème de Chasles, les droites γa, γb, γc, γd forment un faisceau dont les rapports anhar-

---

[1] Les lettres employées ici ne se rapportent pas aux notations précédentes.

moniques sont égaux aux rapports anharmoniques du faisceau formé par les traces des quatre plans (A), (B), (C), (D) sur le plan (T). Mais, par construction, trois droites du premier faisceau comprennent

Fig. 7.



entre elles des angles respectivement égaux aux angles formés par les droites correspondantes du deuxième faisceau. Ces deux faisceaux sont alors égaux, et l'angle, sous lequel on voit *cd* du point γ, est égal à l'angle compris entre les traces sur (T) des plans tangents (C) et (D). Comme le point *d* est arbitraire, on a alors ce théorème :

Sur un plan passant par une génératrice G *d'une surface réglée* (G), *il existe un point d'où l'on voit un segment quelconque de* G *sous un angle égal à l'angle compris entre les traces, sur un plan fixe arbitraire, des plans tangents à* (G) *aux extrémités de ce segment.*

C'est ce point que nous allons prendre pour point représentatif de l'élément de (G) le long de G.

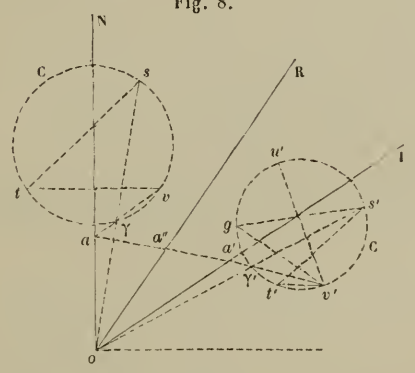
En faisant usage de pareils points un pinceau est toujours représenté par une circonférence de cercle. De chacun des points de cette courbe on voit la distance focale du pinceau sous un angle égal à l'angle compris entre les traces des plans focaux du pinceau sur le plan fixe.

On doit remarquer que la circonférence qui représente un pinceau de normales n'a plus son centre sur le rayon du pinceau. Mais, dans

tous les cas, on a, comme précédemment, un point fixe marqué sur la circonférence pour indiquer l'orientation du pinceau.

Reprenons (*fig.* 8) le pinceau [I], ainsi que les notations précédentes, et choisissons pour plan fixe le plan (T) tangent en o à (S). Le plan de la figure est toujours le plan des trois droites I, R, N qui est perpendiculaire à (T). Le pinceau [I] est représenté par la circonférence C′ et le point v'. Menons par le point v' une perpendiculaire

Fig. 8.



à N. Cette droite coupe C′ au point t'. Le point γ' étant le point représentatif de la surface élémentaire (I), menons la droite $o\gamma'$: elle coupe C′ au point s'. L'angle $v't's'$ est égal à l'angle compris entre les traces sur (T) du plan tangent en o à (I) et du plan de la figure. La droite $v'\gamma'$ rencontre I au point a' où (I) touche le plan de la figure. La droite $\gamma'u'$ (¹) coupe comme précédemment I au point b' où la surface (I) est normale au plan de la figure, parce que le plan de la figure et un plan qui lui est perpendiculaire ont pour traces sur (T) des droites perpendiculaires entre elles.

Pour déterminer les points a et b relatifs à (N) la construction précédente se simplifie, puisqu'il suffit de mener ts parallèlement à $t's'$.

Supposons a'' et b'' déterminés comme précédemment et construisons γ''. Pour cela décrivons sur $a''b''$ une circonférence de cercle comme diamètre ; γ'' est sur cette courbe. Ce point γ'' est aussi sur le segment capable de l'angle $v't's'$ décrit sur oa''. Nous pouvons déterminer

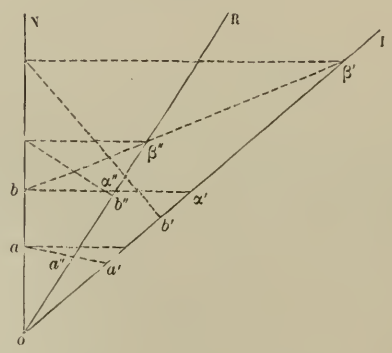
(¹) Pour ne pas la compliquer, nous n'avons pas complété la figure.

le point de rencontre de ces deux circonférences comme précédemment. Du point c' abaissons sur R la perpendiculaire $c'g$; cette droite coupe C′ au point g que l'on joint au point s'. Du point o on mène une parallèle à gs' et une perpendiculaire à cette droite. Ces deux droites rencontrent respectivement les perpendiculaires à R issues des points a'' et b'' en des points que l'on joint par une droite : la projection de o sur cette droite est le point γ'' cherché. Après avoir déterminé un autre point représentatif, tel que γ'', la solution s'achève comme précédemment.

DEUXIÈME CONSTRUCTION PLANE DES ÉLÉMENTS DES SURFACES CAUSTIQUES.

Reprenons (*fig.* 9) les droites I, R, N sur lesquelles nous avons les points en ligne droite a, a', a'' où les surfaces élémentaires correspon-

Fig. 9.



dantes (I), (R), (N) touchent le plan (I, R, N) et les points b, b', b'', liés par la construction reproduite sur la figure, où ces surfaces sont normales au plan (I, R, N).

Menons du point b une perpendiculaire à N et appelons α' et α'' les points où cette droite coupe I et R.

L'angle $\alpha' b \beta'$, coupé par les deux transversales I et R, donne [1]

$$\left(\frac{1}{o\alpha'} - \frac{1}{o\beta'}\right)\frac{1}{\sin i} = \left(\frac{1}{o\alpha''} - \frac{1}{o\beta''}\right)\frac{1}{\sin r}.$$

---

[1] En vertu d'un théorème connu, énoncé dans mon *Cours de Géométrie*

Mais

$$o\alpha' = \frac{ob}{\cos i}, \qquad o\alpha'' = \frac{ob}{\cos r}, \qquad o\beta' = \frac{ob'}{\cos^2 i}, \qquad o\beta'' = \frac{ob''}{\cos^2 r};$$

on a donc

$$(1) \qquad \left(\frac{\cos i}{ob} - \frac{\cos^2 i}{ob'}\right)\frac{1}{\sin i} = \left(\frac{\cos r}{ob} - \frac{\cos^2 r}{ob''}\right)\frac{1}{\sin r}.$$

Appelons φ, φ', φ'' les angles compris entre le plan de la figure et les plans tangents en o aux surfaces élémentaires correspondantes (N), (I), (R); on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos i \operatorname{tang}\varphi', \qquad \operatorname{tang}\varphi = \cos r \operatorname{tang}\varphi''.$$

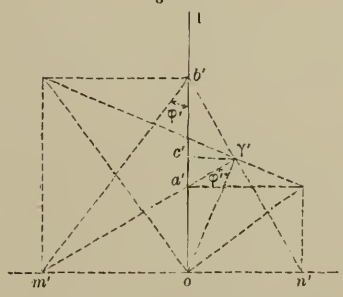
La formule précédente peut alors s'écrire

$$\left(\frac{\cos i}{ob \operatorname{tang}\varphi} - \frac{\cos i}{ob' \operatorname{tang}\varphi'}\right)\frac{1}{\sin i} = \left(\frac{\cos r}{ob \operatorname{tang}\varphi} - \frac{\cos r}{ob'' \operatorname{tang}\varphi''}\right)\frac{1}{\sin r},$$

que nous allons interpréter géométriquement.

Soient toujours (*fig.* 10), pour le rayon I, les points a' et b' où la

Fig. 10.



surface élémentaire (I) est respectivement tangente ou normale au plan de la figure, et γ' le point représentatif de cette surface. Reproduisons

descriptive, 1re édition, p. 180, et démontré précédemment en 1857 dans ma brochure sur la *Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques*. Nous ferons plusieurs fois usage de ce théorème dans la suite de ce Mémoire.

une figure analogue à la *fig.* 2 employée à propos de la théorie de la courbure des surfaces. Ici $a'\gamma' o$ est égal à φ'. La circonférence qui contient les points o, γ', b' coupe la perpendiculaire élevée en o à I au point m' qui appartient à la droite $\gamma' a'$, et l'on voit tout de suite que

$$om' = ob' \operatorname{tang} \varphi'.$$

De la même manière on obtient, pour les surfaces élémentaires (N) et (R), des segments om et om'' respectivement égaux à $ob \operatorname{tang} \varphi$ et $ob'' \operatorname{tang} \varphi''$.

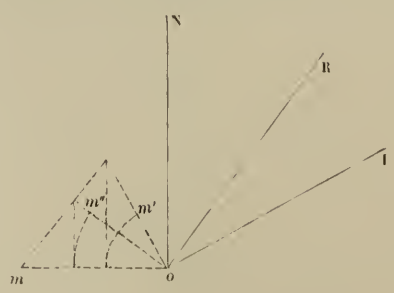
La dernière formule peut donc s'écrire

$$(1) \qquad \left(\frac{\cos i}{om} - \frac{\cos i}{om'}\right)\frac{1}{\sin i} = \left(\frac{\cos r}{om} - \frac{\cos r}{om''}\right)\frac{1}{\sin r},$$

qui prouve que :

Si l'on amène sur om (fig. 11), en les faisant tourner dans le

Fig. 11.



sens direct autour de o, les segments om', om'', et, si des extrémités des segments ainsi amenés on élève des perpendiculaires à om, ces droites rencontrent respectivement om' et om'' en des points qui sont sur une même ligne droite avec m.

Cette liaison des points m, m', m'' permet de construire m'' lorsque l'on connaît m et m'.

Reprenons les deux transversales I et R (*fig.* 9) qui coupent les côtés

de l'angle formé par la droite aa' et par la perpendiculaire élevée du point a à N, on a

$$(2)\qquad \left(\frac{\cos i}{oa} - \frac{1}{oa'}\right)\frac{1}{\sin i} = \left(\frac{\cos r}{oa} - \frac{1}{oa''}\right)\frac{1}{\sin r}.$$

Cette formule peut s'écrire

$$\left(\frac{\operatorname{tang}\varphi \cos i}{oa} - \frac{\operatorname{tang}\varphi' \cos i}{oa'}\right)\frac{1}{\sin i} = \left(\frac{\operatorname{tang}\varphi \cos r}{oa} - \frac{\operatorname{tang}\varphi'' \cos r}{oa''}\right)\frac{1}{\sin r}.$$

Prolongeons sur la *fig.* 10 la droite $b'\gamma'$ jusqu'à sa rencontre n' avec la perpendiculaire élevée en o à I; on voit facilement que

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{oa'} = \frac{1}{on'}.$$

De même, pour les surfaces élémentaires (N) et (R), on a des points n et n'' analogues à n'. La relation précédente devient alors

$$\left(\frac{\cos i}{on} - \frac{\cos i}{on'}\right)\frac{1}{\sin i} = \left(\frac{\cos r}{on} - \frac{\cos r}{on''}\right)\frac{1}{\sin r},$$

qui montre que les points n, n', n'' sont liés par une construction analogue à la construction qui lie entre eux les points m, m', m'' de la *fig.* 11. Le point n'' peut alors se construire lorsque l'on connaît les points n et n'.

Nous allons faire usage de ces points m'', n''; mais, au lieu de prendre deux surfaces élémentaires arbitraires du pinceau [I], nous emploierons la surface élémentaire $(I)_0$ qui fait en o avec le plan de la figure un angle nul et la surface élémentaire $(I)_d$ qui fait en o un angle droit avec le plan de la figure.

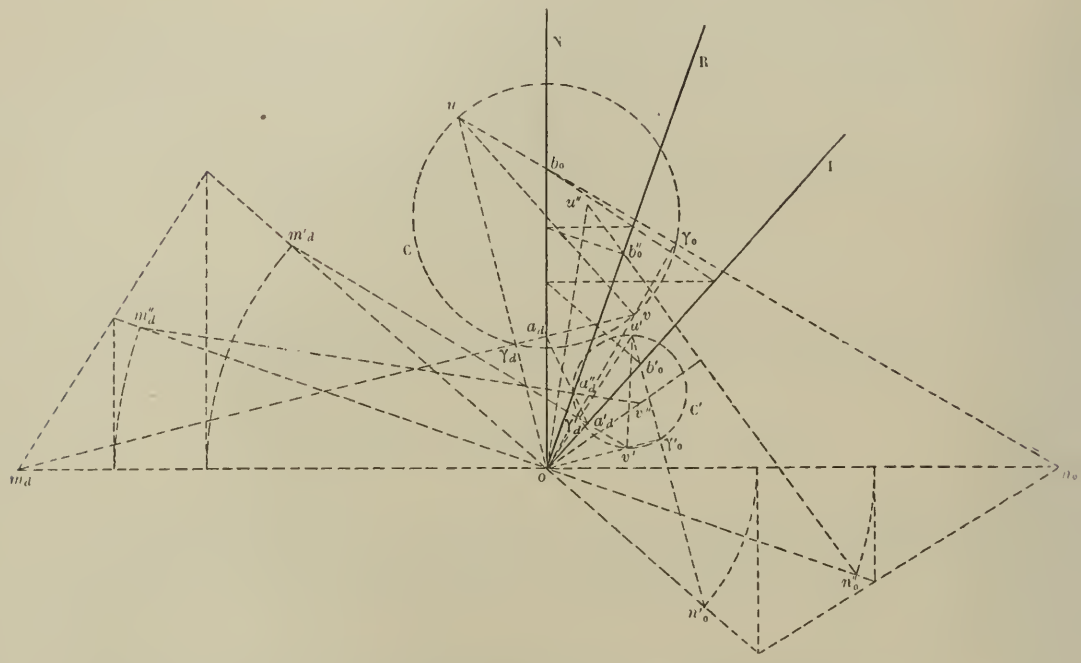
A ces surfaces élémentaires particulières correspondent, pour les pinceaux [N] et [R], des surfaces élémentaires, les unes qui touchent aussi le plan de la figure au point o et les autres qui sont normales aussi en o au plan de la figure.

Nous adoptons les notations suivantes : les points ou segments relatifs aux surfaces élémentaires, qui font en o avec le plan de la figure un angle nul, seront indiqués avec des lettres marquées de l'indice zéro,

et les points ou les segments relatifs aux surfaces élémentaires correspondantes, qui font en o un angle droit avec le plan de la figure, seront indiqués par des lettres marquées de l'indice d.

Faisant usage de ces notations, on a (*fig.* 12) la construction suivante pour déterminer u'' et v''.

Fig. 12.



On joint le point o au point u'. Cette droite coupe C′ au point γ'_d. La droite $v'\gamma'_d$ rencontre I au point a'_d et la perpendiculaire élevée du point o à I au point m'_d. On détermine de même sur N le point a_d et sur la perpendiculaire élevée en o à N le point m_d.

La droite $a_d a'_d$ rencontre R au point a''_d, et la connaissance des points m_d et m'_d entraîne la connaissance du point m''_d.

La droite $m''_d a''_d$ contient le point v'', et la perpendiculaire abaissée du point o sur cette droite contient u''.

On joint le point o au point v', cette droite coupe C′ au point γ'_0. La

droite $u'\gamma'_0$ rencontre I au point b'_0 et la perpendiculaire élevée du point o à I, au point n'_0. On détermine de même sur N le point b_0 et sur la perpendiculaire élevée du point o à N, le point n_0.

La connaissance des points b_0 et b'_0 permet de construire b''_0, comme nous l'avons dit précédemment.

La droite $n''_0 b''_0$ contient le point u'', et la perpendiculaire abaissée du point o sur cette droite contient le point v''.

On a donc deux paires de droites qui contiennent les points u'' et v'' : ces points sont alors déterminés.

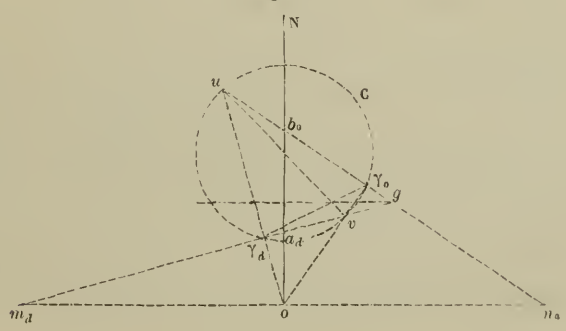
La connaissance des points u'' et v'' entraîne, comme nous l'avons déjà dit, celle des foyers et des plans focaux relatifs au rayon réfracté R.

Le problème d'Optique est donc encore ainsi résolu par une seconde construction dans le cas le plus général.

Remarques. — [N] *étant un pinceau de normales, je dis que $om_d = on_0$.*

Pour le démontrer, prolongeons $\gamma_d v$ (*fig.* 13) jusqu'à sa rencontre

Fig. 13.



en g avec $u\gamma_0$. La droite qui joint le point g au point de rencontre de vu et de $\gamma_d\gamma_0$ est la polaire du point o. Cette droite est alors perpendiculaire à N qui contient le centre de C. Cette polaire est alors aussi parallèle à $m_d n_0$. La droite N est divisée harmoniquement par cette

polaire, par le point o et par vg et ug. Les droites ug, vg, og et la polaire forment alors un faisceau harmonique, comme $m_d n_0$ est parallèle à la polaire de o; les droites vg, og, ug déterminent sur $m_d n_0$ des segments égaux.

Le théorème énoncé est ainsi démontré.

2° *Sa réciproque est vraie*, c'est-à-dire si $om_d = on_0$, alors la droite qui joint le point g au point de rencontre de vu et de $\gamma_d \gamma_0$ est parallèle à $m_d n_0$ et, par suite, perpendiculaire à N; et, comme elle est la polaire de o, la droite N qui lui est perpendiculaire doit contenir le centre de C.

Supposons maintenant que [I] soit un pinceau de normales. On a alors (*fig.* 12) $om'_d = on'_0$, et, comme $om_d = on_0$, on voit par la construction de om''_d et de on''_0 que ces deux segments sont égaux. Par suite, [R] est un pinceau de normales, *puisque* R *doit contenir le centre de* C″.

Le théorème de Malus et de Dupin se trouve ainsi démontré.

3° Dans la relation (1), remplaçons $\cos^2 i$ par $\frac{\tang^2\varphi}{\tang^2\varphi'}$ et $\cos^2 r$ par $\frac{\tang^2\varphi}{\tang^2\varphi''}$; elle devient

$$(1'')\quad \left(\frac{\cos i}{ob\,\tang^2\varphi} - \frac{1}{ob'\,\tang^2\varphi'}\right)\frac{1}{\sin i} = \left(\frac{\cos r}{ob\,\tang^2\varphi} - \frac{1}{ob''\,\tang^2\varphi''}\right)\frac{1}{\sin r};$$

ajoutant membre à membre les relations (1″) et (2), on a

$$\frac{1}{\sin i}\left[\cos i\left(\frac{1}{ob\,\tang^2\varphi} + \frac{1}{oa}\right) - \left(\frac{1}{ob'\,\tang^2\varphi'} + \frac{1}{oa'}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sin r}\left[\cos r\left(\frac{1}{ob\,\tang^2\varphi} + \frac{1}{oa}\right) - \left(\frac{1}{ob''\,\tang^2\varphi''} + \frac{1}{oa''}\right)\right].$$

Appelons toujours l (*fig.* 6) le point de rencontre de N avec la perpendiculaire élevée du point γ à γo et l', l'' les points analogues sur I et R. Nous avons vu, dans la théorie de la courbure des surfaces, que

$$\frac{1}{ol} = \frac{\cos^2\varphi}{ob} + \frac{\sin^2\varphi}{oa},$$

d'où

$$\frac{1}{ol\,\sin^2\varphi} = \frac{1}{ob\,\tang^2\varphi} + \frac{1}{oa};$$

de même

$$\frac{1}{ol' \sin^2 \varphi'} = \frac{1}{ob' \operatorname{tang}^2 \varphi'} + \frac{1}{oa'},$$

$$\frac{1}{ol'' \sin^2 \varphi''} = \frac{1}{ob'' \operatorname{tang}^2 \varphi''} + \frac{1}{oa''}.$$

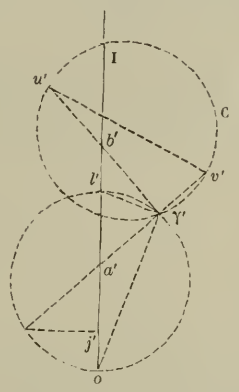
La relation précédente peut alors s'écrire

$$(3) \qquad \frac{1}{\sin i}\left(\frac{\cos i}{ol \sin^2 \varphi} - \frac{1}{ol' \sin^2 \varphi'}\right) = \frac{1}{\sin r}\left(\frac{\cos r}{ol \sin^2 \varphi} - \frac{1}{ol'' \sin^2 \varphi''}\right).$$

Interprétons géométriquement cette relation.

Sur ol' comme diamètre (*fig.* 14) décrivons une circonférence de

Fig. 14.



cercle. Prolongeons $\gamma' a'$ jusqu'à sa rencontre avec cette courbe et projetons le point ainsi obtenu en j' sur I.

On voit facilement sur la figure que $oj' = ol' \sin^2 \varphi'$.

Appelons j et j'' les points qui, sur N et R, sont analogues à j'. La relation (3) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{\sin i}\left(\frac{\cos i}{oj} - \frac{1}{oj'}\right) = \frac{1}{\sin r}\left(\frac{\cos r}{oj} - \frac{1}{oj''}\right),$$

qui est tout à fait analogue à la relation (2) et qui montre que *les points j, j', j'' sont en ligne droite.*

Lorsque, au lieu de prendre une surface élémentaire (I) quelconque, on choisit celle qui est normale en o au plan de la figure et dont le point

représentatif est (*fig.* 12) γ'_d à la rencontre de C′ avec $u'o$, alors le point j' devient le point central relatif à cette surface.

La propriété générale que nous venons de démontrer conduit alors à ce théorème :

Les surfaces élémentaires correspondantes, normales en o au plan de la figure, ont leurs points centraux en ligne droite.

4° Hamilton a donné, pour un pinceau quelconque, une relation que j'ai démontrée géométriquement dans mon Mémoire sur les pinceaux de droites, et qui est tout à fait analogue à la relation d'Euler démontrée précédemment.

On pourrait alors établir l'indicatrice d'un pinceau quelconque, indicatrice qui, dans le cas d'un pinceau de normales, se confond avec l'indicatrice de Dupin. L'emploi de cette indicatrice d'un pinceau quelconque permet d'interpréter d'une autre manière la relation (3). Je donnerai cette interprétation plus loin et lorsque [I] est un pinceau de normales.

DEUXIÈME MODIFICATION DE LA PREMIÈRE CONSTRUCTION GÉNÉRALE.

La première construction générale est basée sur la détermination du point représentatif γ'' de la surface élémentaire (R).

Voici une nouvelle construction de ce point, qui résulte de l'emploi de la liaison géométrique qui existe entre les points m, m', m'' ou entre les points n, n', n''.

La connaissance du point représentatif γ' entraîne, comme nous l'avons vu, celle du point γ. La droite $c\gamma$ coupe N en a et rencontre la perpendiculaire à N, issue de o, au point m. On obtient de même a' et m' au moyen de la droite $c'\gamma'$. D'autre part, au moyen des droites $u\gamma$ et $u'\gamma'$, on détermine les points n et n'.

Pour construire γ'', voici maintenant comment on opère : on prend le point de rencontre de R et de aa' qui est le point a''. Au moyen de m et m', on détermine m'' et, au moyen de n et n', on détermine n''. Sur $m''n''$ comme diamètre on décrit une circonférence de cercle :

cette courbe est coupée par la droite $m''a''$ au point γ'' cherché. Cela se voit au moyen d'une figure analogue à la *fig.* 10.

De la même manière, on construit un point représentatif γ'_1, et la première construction s'achève alors comme précédemment.

CAS PARTICULIER OU LES RAYONS INCIDENTS SONT NORMAUX A UNE SURFACE.

Supposons que [I] soit un pinceau de normales à une surface donnée. Appelons (S_I) la surface parallèle à cette surface et qui passe par le point o. Le pinceau [R] est alors un pinceau de normales. Appelons (S_R) la surface passant par o et à laquelle les rayons réfractés sont normaux.

Les éléments des pinceaux [I], [N], [R] sont maintenant les éléments de courbure des surfaces (S_I) (S) et (S_R).

Appelons toujours ω l'angle dont il faut faire tourner dans le sens direct le plan de la section principale de (S), qui contient le grand axe de l'indicatrice en o, pour amener ce plan à coïncider avec le plan de la figure.

Sur la *fig.* 5 cet angle ω est égal à l'angle $\gamma_2\gamma a$.

Appelons ω' et ω'' les angles analogues pour les surfaces (S_I) et (S_R). Désignons par R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de (S) en o, par R'_1 et R'_2 les rayons de courbure principaux de (S_I) en o et de même par R''_1 et R''_2 les rayons de courbure principaux de (S_R). Ces rayons de courbure sont les distances du point o aux points où N, I, R sont respectivement rencontrés par les circonférences C, C', C'' dont les centres sont maintenant sur ces droites.

La relation (1') s'écrit

$$\left(\frac{1}{om_d} - \frac{1}{om'_d}\right)\frac{1}{\operatorname{tang} i} = \left(\frac{1}{om_d} - \frac{1}{om''_d}\right)\frac{1}{\operatorname{tang} r}.$$

Cherchons l'expression de om_d en fonction des éléments de courbure de (S).

Abaissons (*fig.* 15) du point u la perpendiculaire ue sur N. Le tri-

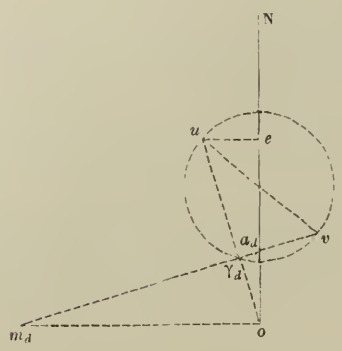
angle $m_d o \gamma_d$ est semblable au triangle oue. On a

$$\frac{o\gamma_d}{om_d} = \frac{ue}{uo};$$

d'où

$$\frac{1}{om_d} = \frac{ue}{o\gamma_d \times uo} = \frac{\frac{us}{2}\sin 2\omega}{o\gamma_d \times uo} = \frac{\sin 2\omega}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

Fig. 15.



De même pour om'_d et om''_d [1]. Introduisons ces valeurs dans la relation précédente, elle devient

$$(1''') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin 2\omega}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tang} i} - \frac{1}{\operatorname{tang} r}\right) \\ &\quad = \frac{\sin 2\omega'}{2}\left(\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R'_1}\right) - \frac{\sin 2\omega''}{2}\left(\frac{1}{R''_2} - \frac{1}{R''_1}\right), \end{aligned} \right.$$

qui est une relation trouvée par M. Bertrand.

La relation (1'), d'où nous avons déduit la relation (1'''), peut s'obtenir directement, comme je le montrerai dans une Note à la fin de ce Mémoire.

---

[1] Si f'_1 et f'_2 sont les foyers d'un pinceau [1] et si θ' est l'angle compris entre les plans focaux de ce pinceau, on trouve facilement que, dans ce cas, $\frac{1}{om'_d}$ et $\frac{1}{on'_v}$ ont pour valeurs

$$\frac{\sin 2\omega'}{2\sin\theta'}\left(\frac{1}{of'_2} - \frac{1}{of'_1}\right) \pm \frac{1}{2\operatorname{tang}\theta'}\left(\frac{1}{of'_2} - \frac{1}{of'_1}\right).$$

Lorsque [I] est un pinceau de normales, le point appelé précédemment l', qui est à la rencontre de I et de la perpendiculaire à $o\gamma'$ élevée du point γ', devient le centre de courbure de la section faite dans (S_I) par le plan tangent en o à la surface élémentaire (I).

De même pour l et l''.

Appelons ρ, ρ', ρ'' les rayons de courbure ol, ol', ol''.

La relation (3) peut s'écrire

$$(3') \qquad \frac{1}{\sin i}\left(\frac{\cos i}{\rho \sin^2\varphi} - \frac{1}{\rho' \sin^2\varphi'}\right) = \frac{1}{\sin r}\left(\frac{\cos r}{\rho \sin^2\varphi} - \frac{1}{\rho'' \sin^2\varphi''}\right).$$

Lorsque que φ' est droit, il en est de même de φ et φ'', et l'on a simplement

$$(3'') \qquad \frac{1}{\sin i}\left(\frac{\cos i}{\rho_d} - \frac{1}{\rho'_d}\right) = \frac{1}{\sin r}\left(\frac{\cos r}{\rho_d} - \frac{1}{\rho''_d}\right),$$

relation analogue à la relation (2) et qui montre que, dans ce cas, *les centres de courbure des sections faites respectivement dans* (S), (S_I), (S_R) *par les plans menés par* N, I, R *perpendiculairement au plan de la figure sont en ligne droite.*

Démontrons directement ce théorème dû à Sturm.

Le plan mené par N perpendiculairement au plan de la figure détermine dans (S) une section dont le centre de courbure est le point où ce plan est normal à la normalie à (S) dont la directrice est perpendiculaire en o au plan de la figure.

Ou encore, ce centre de courbure est le point où le plan de la figure est tangent à cette normalie.

De même pour les points analogues relatifs aux normalies correspondantes. Mais les points de contact du plan de la figure avec les normalies correspondantes sont toujours en ligne droite, comme nous l'avons vu précédemment; donc le théorème est démontré.

Appelons ot la trace commune sur (T) des plans tangents en o aux normalies correspondantes (N), (I) et (R). On a

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = \sin(ot, \mathrm{I}), \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi''} = \sin(ot, \mathrm{R});$$

la relation (3′) peut alors s'écrire

$$(3''') \qquad \frac{1}{\sin i}\left[\frac{\cos i}{\rho} - \frac{\sin^2(ot, \mathrm{I})}{\rho'}\right] = \frac{1}{\sin r}\left[\frac{\cos r}{\rho} - \frac{\sin^2(ot, \mathrm{R})}{\rho''}\right],$$

relation qui a été trouvée par Sturm.

Interprétons géométriquement cette relation. Traçons sur le plan tangent (T) l'indicatrice (n) de (S) avec un paramètre μ; traçons sur le plan mené en o perpendiculairement à I l'indicatrice (i) de $(\mathrm{S_I})$ avec un paramètre μ'; projetons obliquement cette courbe sur (T) au moyen de droites parallèles à I. Appelons (i') la conique ainsi obtenue. De même pour $(\mathrm{S_R})$ nous avons l'indicatrice (r) construite avec le paramètre μ'' et qui est projetée obliquement sur (T) au moyen de droites parallèles à R suivant la conique (r').

Sur ot, la conique (n) intercepte le diamètre δ, la conique (i') intercepte le diamètre δ' et la conique (r') intercepte δ''.

On a

$$\rho = \mu\delta^2, \qquad \rho' = \mu'\delta'^2 \sin^2(ot, \mathrm{I}), \qquad \rho'' = \mu''\delta''^2 \sin^2(ot, \mathrm{R});$$

la relation précédente peut alors s'écrire

$$\frac{1}{\sin i}\left(\frac{1}{\mu\delta^2} - \frac{1}{\mu'\delta'^2}\right) = \frac{1}{\sin r}\left(\frac{1}{\mu\delta^2} - \frac{1}{\mu''\delta''^2}\right).$$

Posons

$$\frac{\mu}{\mu'} = \cos i, \qquad \frac{\mu}{\mu''} = \cos r;$$

on a alors

$$\frac{1}{\operatorname{tang} i}\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta'^2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tang} r}\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta''^2}\right).$$

De là ce théorème :

La différence des inverses des carrés des diamètres interceptés par (n) et (i') sur une droite issue de o est dans un rapport constant avec la différence des inverses des carrés des diamètres interceptés par (n) et (r') sur cette droite, quelle qu'en soit la direction.

Dans le cas particulier où $\delta = \delta'$, on a aussi $\delta = \delta''$; donc :

Les coniques (n), (i') *et* (r') *passent par les mêmes points.*

Ce dernier théorème est dû à Sturm.

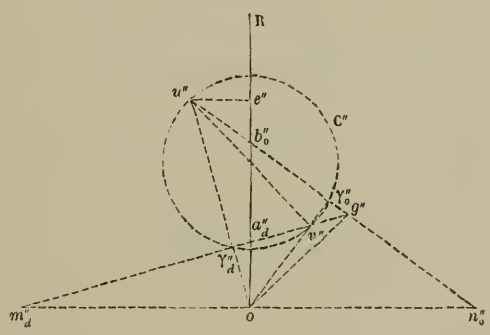
CALCUL DES ÉLÉMENTS DU PINCEAU RÉFRACTÉ LORSQUE CE PINCEAU EST FORMÉ DE NORMALES A UNE SURFACE.

Je vais traduire en formules la dernière construction générale dans le cas où [I] est un pinceau de normales.

Il est bien clair qu'on pourrait faire cette recherche aussi facilement dans le cas d'un pinceau quelconque, mais les formules seraient encore plus compliquées. Les éléments du pinceau des normales [R] sont les éléments de courbure de (S_R), c'est-à-dire ω'', R''_1 et R''_2. Ce sont ces éléments qu'il s'agit de calculer.

Joignons (*fig.* 16, qui est la reproduction, pour R, de la *fig.* 13)

Fig. 16.



le point o au point de rencontre g'' des droites $u''\gamma''_0$ et $v''\gamma''_d$. Dans le triangle $og''u''$ les droites $g''\gamma''_d$ et $o\gamma''_0$ sont deux hauteurs; par conséquent $u''v''$ est perpendiculaire à og''. Les droites og'' et on''_0 étant respectivement perpendiculaires à $u''v''$ et R, l'angle $n''_0 og''$ est égal à $2\omega''$.

L'angle $m''_d g'' n''_0$, coupé par les deux transversales R et $m''_d n''_0$, donne

$$\left(\frac{1}{oa''_d} - \frac{1}{ob''_0}\right)\frac{1}{\sin g''oa''_d} = \left(\frac{1}{on''_0} + \frac{1}{m''_d o}\right)\frac{1}{\sin n''_0 og''},$$

d'où

$$(4)\qquad \frac{1}{\operatorname{tang} 2\omega''} = \frac{om''_d}{2}\left(\frac{1}{oa''_d} - \frac{1}{ob''_0}\right).$$

On voit tout de suite sur la figure que

$$(5)\qquad \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R''_2} = \frac{1}{oa''_d} + \frac{1}{ob''_0}$$

et

$$R''_1 R''_2 = o\gamma''_d \times ou''.$$

Projetons u'' en e'' sur R, on a alors

$$R''_1 R''_2 = oa''_d \times oe''.$$

Calculons oe'' [1]. L'angle $n''_0 u'' e''$, coupé par les transversales R et on_0, donne

$$\left(\frac{1}{ob''_0} - \frac{1}{oe''}\right)\frac{1}{\sin b''_0 ou''} = \frac{1}{on''_0}\,\frac{1}{\sin n''_0 ou''}$$

ou

$$\left(\frac{1}{ob''_0} - \frac{1}{oe''}\right)\frac{1}{\operatorname{tang} b''_0 ou''} = \frac{1}{om''_d},$$

mais l'angle $b''_0 ou''$ est égal à l'angle $om''_d a''_d$ dont la tangente est $\frac{a''_d o}{m''_d o}$; on a donc

$$\frac{1}{oe''} = \frac{1}{ob''_0} - \frac{oa''_d}{\overline{om''_d}^2};$$

par suite,

$$(6)\qquad \frac{1}{R''_1 R''_2} = \frac{1}{oa''_d \times ob''_0} - \frac{1}{\overline{om''_d}^2}.$$

Dans les seconds membres des formules (4), (5) et (6), il n'entre que om''_d, oa''_d, ob''_0, dont voici les valeurs en fonction des éléments de courbure de (S) et de (S_1).

---

[1] On peut remarquer que oe'' est le rayon de courbure de la courbe de contour apparent de (S_R) projetée sur le plan de la figure.

La relation (1‴) donne

$$\frac{1}{om''_d} = \frac{\sin 2\omega'}{2}\left(\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R'_1}\right)\frac{1}{\operatorname{tang} i} - \frac{\sin 2\omega}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{tang} i} - \frac{1}{\operatorname{tang} r}\right).$$

La relation (3″) donne

$$\frac{1}{\rho''_d} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{oa''_d} = \frac{1}{\sin i}\left[\frac{\sin(i-r)}{\rho_d} + \frac{\sin r}{\rho'_d}\right].$$

Remplaçons $\frac{1}{\rho_d}$ et $\frac{1}{\rho'_d}$ en fonction des éléments de courbure de (S) et de (S_1); il vient

$$\frac{1}{oa''_d} = \frac{1}{\sin i}\left[\sin(i-r)\left(\frac{\sin^2\omega}{R_1} + \frac{\cos^2\omega}{R_2}\right) + \sin r\left(\frac{\sin^2\omega'}{R'_1} + \frac{\cos^2\omega'}{R'_2}\right)\right].$$

De la relation (3‴) on déduit

$$\frac{1}{\rho''_0} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{ob''_0} = \frac{1}{\sin i\cos^2 r}\left[\frac{\sin(i-r)}{\rho_0} + \frac{\sin r\cos^2 i}{\rho'_0}\right].$$

Remplaçons $\frac{1}{\rho_0}$ et $\frac{1}{\rho'_0}$ en fonction des éléments de courbure de (S) et de (S_1); il vient

$$\frac{1}{ob''_0} = \frac{1}{\sin i\cos^2 r}\left[\sin(i-r)\left(\frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}\right) + \sin r\cos^2 i\left(\frac{\cos^2\omega'}{R'_1} + \frac{\sin^2\omega'}{R'_2}\right)\right];$$

il suffit de porter ces valeurs de $\frac{1}{om''_d}$, $\frac{1}{oa''_d}$, $\frac{1}{ob''_0}$ dans les équations (4), (5), (6) pour avoir les éléments de courbure de (S_R).

Comme on le voit, les expressions des éléments de courbure de (S_R) en fonction des éléments de courbure de (S) et de (S_1) sont des expressions compliquées.

On peut y arriver par les méthodes analytiques; mais il nous semble qu'il aurait été difficile, pour ne pas dire plus, de revenir de ces expressions compliquées à des constructions géométriques simples.

Cette remarque en faveur de la Géométrie ne doit pas faire perdre de vue que ma solution de la question d'Optique n'est ici qu'une nouvelle application de la méthode générale [1] dont j'avais fait usage pour construire les éléments de courbure de la surface de l'onde [2].

Il y a en outre ici, dans l'application de cette méthode, l'emploi du *point représentatif*, élément plus simple que la droite auxiliaire, et qui m'a permis de traiter complètement le problème d'Optique étudié dans ce Mémoire.

Je compte donner plus tard de nouvelles applications du *point représentatif*, dont je crois l'utilité déjà démontrée par ce travail même.

NOTE PREMIÈRE.

DÉMONSTRATION DIRECTE DE LA RELATION

$$\left(\frac{1}{om} - \frac{1}{om'}\right)\frac{1}{\operatorname{tang} i} = \left(\frac{1}{om} - \frac{1}{om''}\right)\frac{1}{\operatorname{tang} r}.$$

De l'égalité $\sin i = \lambda \sin r$, on déduit

$$\cos i\, di = \lambda \cos r\, dr, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{di}{dr} = \frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r}.$$

Cherchons les expressions de di et de dr, et, pour cela, appliquons une formule qui donne la variation de longueur d'un arc de grand cercle que l'on déplace sur une sphère.

Appelons a_s et b_s (*fig.* 17) les extrémités de l'arc de grand cercle mobile, et e_s le point de contact de cet arc avec son enveloppe. Menons par les extrémités a_s et b_s des arcs de grands cercles respectivement normaux aux trajectoires de ces points. Désignons par α_s et β_s les points où ils rencontrent l'arc normal en e_s à $a_s b_s$, et appelons $d\varepsilon$ l'angle compris entre $a_s b_s$ et cet arc dans sa position infiniment voisine. On a

$$d\, a_s b_s = d\varepsilon(\operatorname{tang} e_s \beta_s - \operatorname{tang} e_s \alpha_s).$$

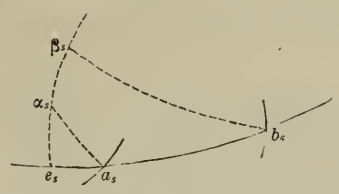
---

(1) C'est cette méthode dont j'avais annoncé la fécondité dans la Notice sur mes travaux (1881).

(2) *Collectanea mathematica.*

Appliquons cette formule, et, pour cela, supposons que a_s et b_s soient les traces sur la sphère de rayons parallèles à N et I, et que les positions infiniment voisines de a_s et b_s soient les traces sur la sphère des positions infiniment voisines de N et de I. Les plans des arcs $a_s\alpha_s$,

Fig. 17.



$b_s\beta_s$ sont respectivement parallèles aux plans centraux des surfaces élémentaires (N) et (I), et le plan de l'arc $e_s\alpha_s$ est parallèle au plan mené perpendiculairement au plan (N, I, R), suivant la caractéristique $aa'a''$ de ce plan. Sur ce dernier plan, les traces des plans centraux des surfaces (N) et (I) font, avec $aa'a''$ des angles que je désigne par η et η', et qui sont respectivement égaux à $e_s\alpha_s$ et $e_s\beta_s$. On a alors

$$di = d\varepsilon(\operatorname{tang}\eta' - \operatorname{tang}\eta).$$

De même, on a

$$dr = d\varepsilon(\operatorname{tang}\eta'' - \operatorname{tang}\eta);$$

donc

$$\frac{di}{dr} = \frac{\operatorname{tang}\eta' - \operatorname{tang}\eta}{\operatorname{tang}\eta'' - \operatorname{tang}\eta},$$

et, comme

$$\frac{di}{dr} = \frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r},$$

il vient

$$\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r} = \frac{\operatorname{tang}\eta' - \operatorname{tang}\eta}{\operatorname{tang}\eta'' - \operatorname{tang}\eta}.$$

Appelons Θ, Θ', Θ'' les angles que les plans centraux des surfaces correspondantes (N), (I), (R) font avec le plan de la figure.

On a

$$\operatorname{tang}\eta = \operatorname{tang}\Theta \sin oaa',$$
$$\operatorname{tang}\eta' = \operatorname{tang}\Theta' \sin oa'a'',$$
$$\operatorname{tang}\eta'' = \operatorname{tang}\Theta'' \sin oa''a.$$

Portons ces valeurs dans la relation précédente; celle-ci devient

$$\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r} = \frac{\operatorname{tang}\Theta' \sin oa'a'' - \operatorname{tang}\Theta \sin oaa'}{\operatorname{tang}\Theta'' \sin oa''a - \operatorname{tang}\Theta \sin oaa'}.$$

Divisons les deux termes du second membre de cette relation par $\sin oaa'$, et remplaçons les rapports des sinus par $\frac{oa}{oa'}$ et $\frac{oa}{oa''}$; il vient

$$\frac{\operatorname{tang} i}{\operatorname{tang} r} = \frac{\dfrac{\operatorname{tang}\Theta'}{oa'} - \dfrac{\operatorname{tang}\Theta}{oa}}{\dfrac{\operatorname{tang}\Theta''}{oa''} - \dfrac{\operatorname{tang}\Theta}{oa}}.$$

On voit (*fig.* 10) que l'angle $c'\gamma'a'$ est égal à Θ', et, par suite, que $\frac{\operatorname{tang}\Theta'}{oa'} = \frac{1}{om'}$; de même pour les autres termes du second membre de la relation précédente. Elle peut donc s'écrire

$$\left(\frac{1}{om'} - \frac{1}{om}\right)\frac{1}{\operatorname{tang} i} = \left(\frac{1}{om''} - \frac{1}{om}\right)\frac{1}{\operatorname{tang} r},$$

relation qu'il s'agissait d'établir.

NOTE DEUXIÈME.

Prenons (*fig.* 6) la surface parallèle à (S_I) qui passe par le point p', et désignons cette surface par (S'_I); de même appelons (S'_R) la surface parallèle à (S_R) qui passe par le point p''.

La surface (S) est le lieu des points dont les distances aux surfaces (S'_I) et $S'_R)$ sont dans le rapport constant $\frac{op'}{op''}$.

Il résulte de la solution de la question d'Optique développée dans ce travail que nous savons déterminer les éléments de courbure de (S) lorsque l'on suppose connus les éléments de courbure des surfaces (S'_I) et (S'_R).

Nous avons donc résolu aussi le problème suivant :

Construire les éléments de courbure de la surface, lieu des points dont le rapport des distances à deux surfaces données est constant.

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. — Deuxième Mémoire : *Groupes cubiques ;*

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans un premier Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 4e fascicule, 1885), nous avons exposé d'une façon complète la théorie des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique Cremona. La généralisation immédiate de ces recherches amène à étudier les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe cubique, c'est-à-dire dans le groupe formé exclusivement de substitutions linéaires, quadratiques et cubiques (2° du premier Mémoire).

Soit une substitution cubique

$$S = | \; z_i \quad \varphi_i(z_1, z_2, z_3) \; | \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La cubique générale

$$\varphi = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 = 0 \qquad (u_i = \text{const. arbit.}),$$

du réseau de S a un point double fixe (indépendant des u_i), que j'appelle ω, et quatre points également fixes (*Clebsch-Lindemann*, traduction Benoît, t. II, p. 197, tableau). Le point ω et les quatre points fixes sont les *points fondamentaux* ou simplement les *fondamentaux* de S.

Dans le présent travail, je m'occuperai seulement des groupes cubiques qui satisfont aux deux conditions suivantes :

1° Aucune substitution du groupe n'a de points fondamentaux infiniment voisins.

2° Le point ω, qui vient d'être défini, est le même pour *toutes* les substitutions cubiques du groupe.

Ces restrictions une fois faites, nous rencontrons une proposition capitale, qui domine toute la théorie :

Théorème. — *Un groupe cubique* G *d'ordre fini est isomorphe à un groupe* Σ *linéaire, à deux variables homogènes, d'ordre fini.*

J'appelle Σ groupe *directeur* de G; le groupe Γ, contenu dans G et correspondant à la substitution unité de Σ, sera appelé *normal*.

La nature même du sujet amène à diviser le présent travail en cinq Parties.

La première Partie traite de la multiplication des substitutions cubiques et établit le théorème capital dont il vient d'être question.

La deuxième Partie contient la théorie complète des groupes normaux.

Je trouve que tout groupe normal Γ peut, par un choix approprié de coordonnées, être ramené à l'un des sept types suivants :

Type I. — Γ se réduit à la substitution unité.

Type II (deux substitutions). — Γ dérive de

$$A = | z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_1 z_3 \quad z_2 z_3 \quad z_1 z_2 |.$$

Type III (deux substitutions). — Γ dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(p z_3 + z_1 z_2) \\ z_2 & z_2(p z_3 + z_1 z_2) \\ z_3 & -z_1 z_2(z_3 + P) \end{vmatrix},$$

où p et P désignent des formes linéaires binaires en z_1, z_2, dont les coefficients dépendent de la nature de Σ.

Type IV (quatre substitutions). — Γ dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 z_3 \\ z_2 & z_2 z_3 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_3 - z_2) \\ z_2 & z_2(z_3 - z_2) \\ z_3 & z_2(z_3 - z_1) \end{vmatrix}.$$

Type V (quatre substitutions). — Γ dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 z_3 \\ z_2 & z_2 z_3 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_3 + p) \\ z_2 & z_2(z_3 + p) \\ z_3 & -(p z_3 + z_1 z_2) \end{vmatrix};$$

p désigne une forme linéaire binaire en z_1, z_2, dont les coefficients dépendent de la nature du groupe directeur Σ.

Type VI (quatre substitutions). — Γ dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 z_3 \\ z_2 & z_2 z_3 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(p z_3 + P z_1) \\ z_2 & z_2(p z_3 + P z_1) \\ z_3 & -z_1(P z_3 + p z_2) \end{vmatrix};$$

p et P sont deux formes linéaires binaires en z_1, z_2, dont les coefficients dépendent de la nature du groupe directeur Σ.

Type VII (quatre substitutions). — Γ dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(p z_3 + cc') \\ z_2 & z_2(p z_3 + cc') \\ z_3 & -cc'(z_3 + P) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(q z_3 + cc') \\ z_2 & z_2(q z_3 + cc') \\ z_3 & -cc'(z_3 + Q) \end{vmatrix};$$

p, q, P, Q, c, c' sont des formes linéaires binaires en z_1, z_2, dont les coefficients dépendent de la nature de Σ et entre lesquelles existe l'identité

$$pQ + qP = 2cc'.$$

Dans la troisième Partie, j'examine quelle peut être la nature du groupe directeur Σ, lorsque Γ appartient successivement aux sept types précédents.

Si Γ est du type I, Σ est l'un quelconque des cinq types de groupes linéaires d'ordre fini à deux variables, énumérés par M. Jordan (*Journal de Crelle*, t. 84, p. 111).

Si Γ est des types II, VI ou VII, Σ appartient au second des types de M. Jordan et dérive des deux substitutions

$$\begin{vmatrix} z_1 & l_1 z_1 \\ z_2 & l_2 z_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix},$$

où

$$l_1^m = l_2^m = 1, \qquad m = \text{entier}.$$

D'ailleurs $m = 3$, si Γ est des types VI ou VII.

Si Γ est du type III ou V, Σ est contenu dans le groupe octaédrique. Enfin G ne peut être cubique si Γ est du type IV.

Dans la quatrième Partie, je traite un cas particulier remarquable : ce sont les groupes *normo-linéaires*. Un pareil groupe G résulte de la combinaison d'un groupe normal Γ avec un groupe linéaire à trois variables homogènes L, lequel ne peut évidemment, d'ailleurs, être que d'ordre fini.

Omettant les groupes linéaires ou quadratiques déjà construits ailleurs, je trouve que tout groupe normo-linéaire G peut se ramener, par un choix approprié de coordonnées, à l'un des sept types suivants, numérotés de VIII à XIV.

Si Γ est du type III, G est de l'un des trois types suivants :

Type VIII (quatre substitutions). — G dérive de

$$l = \begin{vmatrix} z_1 & -z_1 \\ z_2 & z_2 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 z_3 + p) \\ z_2 & z_2(z_2 z_3 + p) \\ z_3 & -(z_3 p + z_2 \mathrm{P}) \end{vmatrix},$$

où p et P sont deux formes binaires quadratiques en z_1, z_2, où manque le rectangle $z_1 z_2$ des variables, et d'ailleurs quelconques.

Type IX (six substitutions). — G dérive de

$$l = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_2 & z_2(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_3 & -z_1(z_1 z_3 + z_2^2) \end{vmatrix}$$

$$(\theta^2 + \theta + 1 = 0).$$

Type X (huit substitutions). — G dérive de

$$l = \begin{vmatrix} z_1 & i z_1 \\ z_2 & -z_2 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_2 & z_2(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_3 & -(z_1^2 z_3 + z_2^3) \end{vmatrix}$$

$$(i^2 + 1 = 0).$$

Si Γ est du type V, G appartient à l'un de deux types suivants :

Type XI (huit substitutions). — G dérive de

$$l = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 z_3 \\ z_2 & z_2 z_3 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix}$$

et

$$C = \begin{vmatrix} z_1 & z_1[z_3 + k(z_1 + z_2)] \\ z_2 & z_2[z_3 + k(z_1 + z_2)] \\ z_3 & -[k(z_1 + z_2)z_3 + z_1 z_2] \end{vmatrix} \qquad (k = \text{const. arbitraire}).$$

Type XII (seize substitutions). — G dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_3 + z_2) \\ z_2 & z_2(z_3 + z_2) \\ z_3 & -(z_2 z_3 + 2z_1^2 - z_2^2) \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_2 & z_2(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_3 & -(z_1^2 z_3 + z_2^3) \end{vmatrix},$$

$$l = \begin{vmatrix} z_1 & i z_1 \\ z_2 & -z_2 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

où l'on a

$$i^2 + 1 = 0.$$

Si Γ est du type VI, G est du type unique suivant :

Type XIII (vingt-quatre substitutions). — G dérive de

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad t = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 z_3 \\ z_2 & z_2 z_3 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_2 & z_2(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_3 & -z_1(z_1 z_3 + z_2^2) \end{vmatrix} \qquad (\theta^2 + \theta + 1 = 0).$$

Si Γ est du type VII, G appartient au type unique suivant :

Type XIV (vingt-quatre substitutions). — G dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1[z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2] \\ z_2 & z_2[z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2] \\ z_3 & -(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2)(z_3 - 2z_1 - 2z_2) \end{vmatrix},$$

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad t = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (\theta^2 + \theta + 1 = 0).$$

Les groupes cubiques d'ordre fini sont passablement nombreux (une cinquantaine) et leur énumération complète serait fastidieuse. Je me borne, dans la cinquième Partie, à faire sur un exemple particulier la construction d'un groupe cubique G, dont on se donne le groupe normal Γ, choisi dans les types ci-dessus de I à VII, et le groupe directeur Σ, choisi parmi les divers types de l'énumération précitée de M. Jordan (*Journal de Crelle*, t. 84, p. 111).

L'exemple choisi consiste à construire tous les groupes cubiques G qui ont pour groupe directeur Σ, le groupe formé par les trois puis-

sances de la substitution unique

$$\sigma = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \end{vmatrix} \qquad (\theta^2 + \theta + 1 = 0).$$

J'appellerai $\sigma(u)$ ce que devient la forme binaire u en z_1 et z_2, quand on y remplace z_1 par θz_1 et z_2 par $\theta^2 z_2$.

Cela posé, on trouve les groupes suivants, abstraction faite des groupes linéaires, quadratiques ou normo-linéaires, déjà construits ailleurs.

Du type I dérivent les deux groupes :

Type XV (trois substitutions). — G dérive de

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \, [p z_3 + (z_1 - z_2) b] \\ z_2 & \theta^2 z_2 [p z_3 + (z_1 - z_2) b] \\ z_3 & (\theta z_1 - \theta^2 z_2) a z_3 \end{vmatrix},$$

où p et b sont deux formes linéaires binaires quelconques en z_1, z_2 et $a = \sigma(b)$.

Type XVI (trois substitutions). — G dérive de

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \, [p_0 z_1 z_3 + (z_1 - z_2) b] \\ z_2 & \theta^2 z_2 [p_0 z_1 z_3 + (z_1 - z_2) b] \\ z_3 & \theta a (\theta z_1 - \theta^2 z_2) z_3 \end{vmatrix},$$

où p_0 est une constante arbitraire; a, b sont définies comme au groupe précédent.

Du type II dérive le *type XVII* (six substitutions). G s'obtient en combinant au type II la substitution quadratique

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \, [z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2 [z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_3 & \mu z_3 (\theta^2 z_1 - \theta z_2) + z_1 z_2 \end{vmatrix},$$

$$\mu(\theta^2 - \theta) + 1 = 0.$$

Du type III dérivent les trois types suivants :

Type XVIII (six substitutions). — G dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1[(2z_1+z_2)z_3 - z_1(z_1-z_2)] \\ z_2 & z_2[(2z_1+z_2)z_3 - z_1(z_1-z_2)] \\ z_3 & z_1(z_1-z_2)(z_3+z_2) \end{vmatrix}$$

et de

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1\,[(1-\theta^2)z_3 + \theta^2(z_1-z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2[(1-\theta^2)z_3 + \theta^2(z_1-z_2)] \\ z_3 & z_3(\theta z_1 - \theta^2 z_2) \end{vmatrix}.$$

Type XIX (six substitutions). — G dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1[qz_3 + z_1(z_1-z_2)] \\ z_2 & z_2[qz_3 + z_1(z_1-z_2)] \\ z_3 & -z_1[(z_1-z_2)z_3 + z_2 b] \end{vmatrix},$$

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1\,[z_2 z_3(\theta-1) + b(z_1-z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2[z_2 z_3(\theta-1) + b(z_1-z_2)] \\ z_3 & \theta^2 a z_3(\theta z_1 - \theta^2 z_2) \end{vmatrix}.$$

q et b sont deux formes linéaires binaires en z_1, z_2, entre lesquelles existe l'identité

$$bq = z_1(z_1-z_2) + R(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2)$$
$$(R = \text{const. arbitraire}),$$

et d'ailleurs quelconques; enfin

$$a = \sigma(b).$$

Type XX (six substitutions). — G dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1[qz_3 + r(z_1-z_2)] \\ z_2 & z_2[qz_3 + r(z_1-z_2)] \\ z_3 & -(z_1-z_2)(rz_3 + z_2) \end{vmatrix}$$

et de

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \, [p z_3 + b(z_1 - z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2 [p z_3 + b(z_1 - z_2)] \\ z_3 & z_3 a(\theta z_1 - \theta^2 z_2) \end{vmatrix};$$

p, q, r, b désignent des formes linéaires binaires en z_1, z_2 assujetties uniquement à satisfaire aux deux identités

$$p z_2 = r \, (z_1 - z_2) - (\theta z_1 - \theta^2 z_2)\sigma(r),$$
$$q b z_2 = r^2 (z_1 - z_2) + \mathrm{R} z_1 (z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2)$$
$$(\mathrm{R} = \text{const. arbitraire});$$

enfin

$$a = \sigma(b).$$

Du type VI dérive le *type XXI* (douze substitutions). — G s'obtient en combinant au type XVII la substitution

$$B = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 [z_3 (2 z_1 + z_2) - z_1 (z_1 + 2 z_2)] \\ z_2 & z_2 [z_3 (2 z_1 + z_2) - z_1 (z_1 + 2 z_2)] \\ z_3 & -z_1 [-z_3 (z_1 + 2 z_2) + z_2 (2 z_1 + z_2)] \end{vmatrix}.$$

Du type VII dérive le *type XXII* (douze substitutions). — G s'obtient en combinant au type VII la substitution quadratique

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 (\lambda z_3 + \mu c) \\ z_2 & \theta^2 z_2 (\lambda z_3 + \mu c) \\ z_3 & b(\lambda' z_3 + \mu' c) \end{vmatrix};$$

où $b = \sigma(c)$, et entre les constantes λ, μ, λ', μ' existe l'équation

$$\lambda'^2 + \lambda\mu' + \mu\lambda' + \mu^2 = 0.$$

Quant aux valeurs des coefficients des six formes linéaires binaires p, q, P, Q, c, c', qui entrent dans l'expression des substitutions du type VII, ces valeurs sont fort compliquées et n'offrent rien de remarquable. Nous ne les donnerons pas.

Pour achever complètement l'étude des groupes cubiques d'ordre fini, il resterait :

1° A examiner comment se modifient les considérations précédentes quand les points fondamentaux se rapprochent infiniment les uns des autres suivant tous les groupements possibles;

2° A étudier les groupes cubiques pour lesquels le point fondamental double ω, défini comme plus haut, n'est plus le même pour les diverses substitutions cubiques du groupe.

Je n'entreprendrai pas pour le moment l'étude de ces deux questions.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALITÉS ET DÉFINITIONS.

1. On sait que le système des *points fondamentaux* d'une substitution cubique S se compose d'un point fondamental double ω et de quatre points fondamentaux simples a, b, c, d. Le système des *courbes fondamentales* se compose de la *conique fondamentale* qui passe par les cinq points ω, a, b, c, d et des quatre *rayons fondamentaux* $\overline{\omega a}$, $\overline{\omega b}$, $\overline{\omega c}$, $\overline{\omega d}$. Soient de même ω, a', b', c', d' les points fondamentaux de S^{-1}. Je désignerai S par le symbole

$$S\left\{\begin{matrix}\omega abcd\\ \omega a'b'c'd'\end{matrix}\right. \quad \text{ou bien} \quad S\left\{\begin{matrix}abcd\\ a'b'c'd'\end{matrix}\right.,$$

1° si S fait correspondre au point a tous les points du rayon fondamental $\overline{\omega a'}$, ...; 2° si à tous les points du rayon $\overline{\omega a}$ S fait correspondre le point unique a', ...; 3° si S fait correspondre à ω tous les points de la conique $\omega a'b'c'd'$, et si S^{-1} fait correspondre à ω tous les points de la conique $\omega abcd$. Les points a et a', b et b', ... seront dits *correspondants* (*voir*, pour toutes les définitions précédentes, le Tome II des *Leçons de Géométrie de Clebsch*, traduction Benoist).

J'appellerai, dans tout ce qui suit, *facteur fondamental* une expression qui, égalée à zéro, donne l'équation d'une ligne fondamentale.

L'application d'un théorème déjà connu (3°, premier Mémoire) four-

nit comme corollaires les deux lemmes suivants que j'énoncerai sans démonstration :

LEMME I. — *Le produit* $S'S$ *de deux substitutions cubiques est :*

Cubique si S' *et* S^{-1} *ont deux points fondamentaux communs;*
Quadratique si S' *et* S^{-1} *ont trois points fondamentaux communs;*
Linéaire si S' *et* S^{-1} *ont quatre points fondamentaux communs,*

sans compter, bien entendu, le point fondamental double commun ω.

LEMME II. — *Le produit* sS *d'une substitution quadratique par une substitution cubique est :*

Cubique, si 1° *s a* ω *pour point fondamental et encore un autre point fondamental commun avec* S^{-1}, *ou bien si* 2° *s a ses trois points fondamentaux communs avec* S^{-1};
Quadratique, si s a ω *pour point fondamental et ses deux autres points fondamentaux communs avec* S^{-1}.

D'ailleurs, on ne peut avoir $sS = l$, l étant linéaire; car il viendrait $s = lS^{-1}$; une substitution quadratique serait identique à une cubique, ce qui est absurde.

2. J'appelle substitution de la forme r la substitution d'ordre n

$$r = \begin{vmatrix} z_1 & (a_{11}z_1 + a_{12}z_2)(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_2 & (a_{21}z_1 + a_{22}z_2)(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_3 & P_{n-1}z_3 + P_n \end{vmatrix},$$

les a désignant des constantes, et les p et P des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice.

On peut écrire aussi

$$r = \begin{vmatrix} z_1 & \rho(z_1)(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_2 & \rho(z_2)(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_3 & P_{n-1}z_3 + P_n \end{vmatrix},$$

en désignant par ρ la substitution linéaire binaire

$$\rho = \begin{vmatrix} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \end{vmatrix}.$$

La substitution ρ est dite la substitution *directrice* de r. Cela posé, un calcul simple démontre les lemmes suivants :

Lemme I. — *Le produit $r'r$ de deux substitutions de la forme r est aussi de la forme r, et la substitution directrice du produit $r'r$ est le produit $\rho'\rho$ des substitutions directrices ρ et ρ' de r et r'.*

De là découlent les corollaires :

Corollaire I. — *Les substitutions de la forme r forment un groupe* R.

Corollaire II. — *Le groupe* R *est isomorphe à un groupe Σ entre deux variables, dérivé des substitutions linéaires ρ.*

Lemme II. — *Le groupe linéaire Σ, défini comme il vient d'être dit, est d'ordre fini.*

Prenons dans G une substitution $r(r^k = 1)$ de directrice ρ. Appelons ω le point $z_1 = z_2 = 0$; soient

x un point *quelconque* du plan;
$x^{(k)}$ le point $r^k(x)$;
ξ et $\xi^{(k)}$ les directions $\overline{\omega x}$ et $\overline{\omega x^{(k)}}$.

On a

$$x = x^{(k)}, \qquad \xi = \xi^{(k)};$$

mais $\xi^{(k)} = \rho^k(\xi)$: donc $\rho^k = 1$; ρ est *quelconque* dans Σ, et le lemme est démontré.

Passons maintenant à l'étude des groupes cubiques G.

3. Prenons $z_1 = z_2 = 0$ pour coordonnées du point ω. Je dis que toute substitution de G sera de la forme r. Nous allons démontrer

successivement la proposition pour une substitution cubique S, linéaire L, quadratique s.

1° *Une substitution cubique* S *de* G *est de la forme* r. En effet, la cubique générale φ du réseau de S a en $\omega(z_1 = z_2 = 0)$ un point double et $\varphi = \varphi_2 z_3 + \varphi_3$, φ_2 et φ_3 étant des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice. De plus, à toute droite issue de ω, S^{-1} fait correspondre une cubique $ap = 0$, $a = 0$ étant une droite passant par ω (et, par suite, $a = a_1 z_1 + a_2 z_2$), et $p = 0$ étant la conique fondamentale de S ($p = p_1 z_3 + p_2$, où p_1 et p_2 désignent des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice). Remarquons que les droites $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ passent par ω : il vient pour S l'expression

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & (a_{11} z_1 + a_{12} z_2)(p_1 z_3 + p_2) \\ z_2 & (a_{21} z_1 + a_{22} z_2)(p_1 z_3 + p_2) \\ z_3 & P_2 z_3 + P_3 \end{vmatrix},$$

qui est bien de la forme r. C. Q. F. D.

2° *Une substitution linéaire* L *est de la forme* r. En effet, prenons une substitution cubique S de G; S aura ω pour point fondamental double. SL sera cubique; elle aura aussi, par hypothèse, ω pour point fondamental double : L laisse donc ω immobile, et l'on a

$$L = \begin{vmatrix} z_1 & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ z_2 & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \\ z_3 & p_0 z_3 + p_1 \end{vmatrix},$$

p_1 étant linéaire en z_1, z_2,

L est donc bien de la forme r.

3° *Une substitution quadratique* s *est de la forme* r.

Remarquons d'abord qu'une substitution quadratique de la forme r est du symbole

$$\left\{ \begin{matrix} \omega \ldots \\ \omega \ldots \end{matrix} \right. .$$

Cela posé, soit T une substitution de G quadratique et non de la

forme r; considérons le produit $u = TS$ de T par une substitution cubique S de G; u ne peut être linéaire (1°, lemme II), ni cubique, car alors u serait de la forme r, ainsi que S, et $T = uS^{-1}$ serait aussi de la forme r, ce qui est contre l'hypothèse; u ne peut donc être que quadratique; T a ω pour point fondamental et ses deux autres points fondamentaux communs avec S^{-1} (1°, lemme II). On peut donc écrire

$$T \left\{ \begin{matrix} \omega a b \\ a' \omega b' \end{matrix} \right., \qquad S^{-1} \left\{ \begin{matrix} abcd \\ \ldots\ldots \end{matrix} \right..$$

T est bien de la forme écrite, puisqu'on ne peut avoir $T \left\{ \begin{matrix} \omega \ldots \\ \omega \ldots \end{matrix} \right.$ et que T^{-1} a aussi ω pour point fondamental, car on peut raisonner sur T^{-1} comme on vient de le faire sur T. La substitution $v = S^{-1}T^{-1}$ ne peut être, en vertu de ce qui précède, que quadratique : donc ω est aussi point fondamental pour v. Effectuons le produit $v = S^{-1}T^{-1}$; après séparation des facteurs fondamentaux $(z\omega b')^2$, $(za'b')$, $(z\omega a')$, il reste pour v la substitution quadratique (*voir*, pour la manière de faire le produit de deux substitutions, le premier Mémoire, 2°, 3°, 4°)

$$v \left\{ \begin{matrix} a' T(c) T(d) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right.;$$

v doit avoir, comme T, ω pour point fondamental; il faut, par suite, que $T(c) = \omega$ ou $T(d) = \omega$; dans le premier cas, ω, b, c sont en ligne droite; dans le second cas, ce sont les points ω, b, d, puisque $\overline{\omega b}$ est la droite fondamentale de T qui correspond au point fondamental ω de T^{-1} (premier Mémoire, *passim*). La substitution S aurait donc deux points fondamentaux b, c en ligne droite avec ω; cela est absurde, car alors la droite $\overline{\omega b}$ couperait quatre fois la cubique générale φ du réseau de S, savoir : en b, en c et deux fois en ω. Il se détacherait de φ la droite $\overline{\omega bc}$, et S ne serait plus cubique, ce qui est contre l'hypothèse.

Une substitution quadratique de G est, par suite, forcément de la forme r.

Le groupe G étant exclusivement composé, comme on vient de le

voir, de substitutions de la forme r, on a, par application des lemmes du 2°, le théorème capital suivant :

THÉORÈME. — *Un groupe cubique* G *d'ordre fini est isomorphe à un groupe linéaire binaire* Σ *d'ordre fini, appelé groupe* directeur *de* G.

Le groupe Γ, contenu dans G et correspondant à la substitution unité de Σ, est dit groupe *normal;* les substitutions de Γ auront l'unité pour directrice et seront aussi dites *normales.*

4. Avant de passer à la construction des groupes normaux, je démontrerai trois propositions importantes d'un continuel usage dans la suite.

LEMME. — *Soient* a, a', a'', ... *les points qui sont fondamentaux pour l'une au moins des substitutions de* G; *on ne pourra trouver sur une droite quelconque issue de* ω *plus d'un point fondamental* a, a', ...

Remarquons d'abord qu'une substitution de G d'ordre n ($n = 2$ ou 3)

$$S \left\{ \begin{array}{l} ab\ldots \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$$

ne peut avoir ses deux points fondamentaux a et b en ligne droite avec ω; en effet, la droite $\overline{\omega ab}$ couperait $n+1$ fois la courbe générale φ du réseau de S, savoir : $n-1$ fois en ω, en b et en a; φ est d'ordre n et se décomposerait en une courbe d'ordre $n-1$, après séparation de la droite $\overline{\omega ab}$; S serait, par suite, d'ordre $n-1$, ce qui est absurde.

Soient maintenant S et S′ deux substitutions de G

$$S \left\{ \begin{array}{l} a\ldots \\ \alpha\ldots \end{array} \right., \qquad S' \left\{ \begin{array}{l} a'\ldots \\ \alpha'\ldots \end{array} \right.,$$

et supposons ω, α, a' en ligne droite. Aux divers points de la droite $\overline{\omega\alpha}$, S^{-1} fait correspondre les diverses directions issues de a (*Clebsch,*

t. II, p. 197). La substitution S′S a pour courbe générale de son réseau $S\varphi'$ (φ' étant la courbe générale du réseau de S′); φ' coupe $\omega\alpha$ en un point fixe a', et $S\varphi'$ touche, par suite, en a une direction fixe; en d'autres termes, S′S a en a deux points fondamentaux infiniment rapprochés, ce qui est contraire à nos hypothèses initiales. Les points ω, a', α ne peuvent être en ligne droite.

On pourrait objecter que la droite $\overline{\omega a}$ se sépare de $S\varphi'$, mais cela est absurde, car alors α figure parmi les points fondamentaux de S′ (3° et 4° du premier Mémoire); S′ aurait ses trois points fondamentaux ω, a', α en ligne droite, ce qui est impossible.

Le lemme permet de définir sans ambiguïté un point fondamental par la direction qui le joint à ω.

Théorème II. — *Si l'on transforme par la directrice la direction d'un point fondamental, on obtient la direction du point fondamental correspondant.*

Soit une substitution de la forme r et d'ordre $n = 2$ ou 3

$$r = \begin{vmatrix} z_1 & \rho(z_1)(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_2 & \rho(z_2)(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_3 & P_{n-1}z_3 + P_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & \rho(z_1)p \\ z_2 & \rho(z_2)p \\ z_3 & P \end{vmatrix}.$$

Les points fondamentaux se trouvent à l'intersection des courbes $p = 0$ et $P = 0$; la forme binaire d'ordre $2n - 2$ en z_1, z_2

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ P_{n-1} & P_n \end{vmatrix},$$

donne, égalée à zéro, le produit des $2n - 2$ directions fondamentales. Soit x un point fondamental; désignons par p'_{n-2}, ... ce que devient p_{n-2}, ... quand on remplace les coordonnées courantes par celles de x, et prenons les coordonnées

$$\lambda x'_1 = x_1, \qquad \lambda x'_2 = x_2, \qquad \lambda x'_3 = x_3 + \zeta, \qquad \lambda = \text{const. quelconque},$$

d'un point x' quelconque de la droite $\overline{\omega x}$. Les valeurs x_1, x_2 vérifient

l'équation $\Delta = 0$, et les coordonnées du point y transformé de x' par r sont

$$\rho(x_1)\zeta p'_{n-2}, \qquad \rho(x_2)\zeta p'_{n-2}, \qquad P'_{n-1}\zeta,$$

c'est-à-dire que y est indépendant de la position de x' sur $\overline{\omega x}$, position définie par la valeur du paramètre ζ; y est donc le point fondamental de r^{-1} correspondant à x, la direction $\overline{\omega y}$ est définie par

$$z_2\rho(x_1) - z_1\rho(x_2) = 0,$$

la direction $\overline{\omega x}$ par

$$z_2 x_1 - z_1 x_2 = 0,$$

et le théorème est démontré.

Théorème III. — *Le groupe directeur Σ d'un groupe cubique* G *permute entre elles les directions fondamentales.*

Soient

a un point fondamental;
S une substitution de G;
σ la substitution de Σ directrice de S.

Si a est fondamental pour S, le théorème précédent montre que $\sigma(a)$ est une direction fondamentale de S^{-1}. Si a n'est pas fondamental de S, soit S' la substitution de G dont a est un fondamental, le point $S(a)$ sera un fondamental de $S'S^{-1}$ (4°, premier Mémoire), la direction $\sigma(a)$ est fondamentale pour $S'S^{-1}$. Le théorème se trouve complètement démontré.

Le corollaire des deux propositions précédentes est le suivant :

Théorème IV. — *Le groupe directeur Σ est isomorphe à un groupe entre* N *lettres,* N *étant le nombre total des points fondamentaux.*

Cela est évident, puisque Σ permute entre elles les directions fondamentales (théorème III) et qu'il n'y a qu'un point fondamental (lemme) sur chacune de ces directions.

DEUXIÈME PARTIE.

GROUPES NORMAUX.

5. Lemme. — *Une substitution normale ne peut être linéaire, sans se réduire à l'unité.*

Soit L une pareille substitution; S, substitution cubique de G, sera

$$S \left\{ \begin{matrix} abcd \\ \ldots\ldots \end{matrix} \right. .$$

Les points fondamentaux de SL seront a', b', c', d' en posant $a' = L^{-1}(a)$, ...; mais a et a', b et b' sont sur une même droite issue de ω, donc (4°, lemme) a' se confond avec a, b' avec b, etc., et L laisse immobile les quatre points a, b, c, d; ces quatre points ne sont pas en ligne droite, car la cubique φ du réseau de S se décomposerait et S ne serait plus cubique. L laissant immobile les quatre points a, b, c, d se réduit à l'unité d'après les propriétés connues des substitutions linéaires.

Théorème. — *Une substitution normale a pour carré l'unité.*

Soit A une substitution normale, a un de ses points fondamentaux. Le fondamental de A^{-1} correspondant à a est sur $\overline{\omega a}$, puisque la directrice se réduit à l'unité : a se confond ainsi avec son correspondant (4°, lemme et théorème II); A et A^{-1} ont quatre fondamentaux communs, A^2 est linéaire (1°, lemme I) et, comme A^2 est normale, $A^2 = 1$. Nous venons de supposer A cubique : la démonstration serait la même si A était quadratique; A et A^{-1} auraient seulement deux fondamentaux communs au lieu de quatre et encore $A^2 = 1$.

Il résulte de là que A et A^{-1} sont identiques; si l'on pose

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_2 & z_2(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_3 & P_{n-1}z_3 + P_n \end{vmatrix} \qquad (n = 2 \text{ ou } 3),$$

un calcul simple montre que

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(p_{n-2}z_3 - P_{n-1}) \\ z_2 & z_2(p_{n-2}z_3 - P_{n-1}) \\ z_3 & -p_{n-1}z_3 + P_n \end{vmatrix};$$

d'où identiquement $P_{n-1} = -p_{n-1}$. Je prendrai dorénavant, par suite, une substitution normale sous la forme

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(a_{n-2}z_3 + a_{n-1}) \\ z_2 & z_2(a_{n-2}z_3 + a_{n-1}) \\ z_3 & -(a_{n-1}z_3 + a_n) \end{vmatrix},$$

les a étant des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice.

Le lieu des points z, tels que $A(z) = z$, est donné par les équations

$$\frac{z_1(a_{n-2}z_3 + a_{n-1})}{z_1} = \frac{z_2(a_{n-2}z_3 + a_{n-1})}{z_2} = \frac{-(a_{n-1}z_3 - a_n)}{z_3}:$$

ce lieu est donc la courbe d'ordre n

$$\mathfrak{A} = a_{n-2}z_3^2 + 2a_{n-1}z_3 + a_n = 0,$$

que j'appelle courbe *invariante* de A.

La courbe fondamentale de A,

$$a_{n-2}z_3 + a_{n-1} = 0 = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z_3},$$

se trouve être la polaire de $\mathfrak{A}$ par rapport à ω et les $2n-2$ points fondamentaux sont les points de ramification de $\mathfrak{A}$ par rapport à ω (points de contact des tangentes issues de ω).

Posons $x' = A(x)$, x étant un point quelconque du plan; un calcul simple montre que x et x' sont harmoniquement placés par rapport aux deux points où $\overline{\omega x}$ coupe $\mathfrak{A}$.

D'ailleurs de la forme de A on déduit les égalités

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2, \qquad -x'_3 = \frac{a_{n-2}x_3 + a_{n-1}}{a_{n-1}x_3 + a_n},$$

en remplaçant dans les a les coordonnées courantes par celles de x. Posons $x_3 = \frac{t_1}{t_2}$, on voit que la substitution A équivaut pour les divers points de $\overline{\omega x}$, définis par les valeurs du rapport $x_3 = t_1 : t_2$, à la substitution linéaire

$$\alpha = \begin{vmatrix} t_1 & a_{n-2}t_1 + a_{n-1}t_2 \\ -t_2 & a_{n-1}t_1 + a_n t_2 \end{vmatrix};$$

un calcul simple fait voir que le groupe α' dérivé des substitutions α, qui correspondent aux diverses substitutions du groupe normal Γ, est isomorphe à Γ; l'isomorphisme est holoédrique parce qu'à la substitution unité de α' correspond la substitution unité de Γ.

La forme quadratique binaire en t_1, t_2

$$T_a = a_{n-2}t_1^2 + 2a_{n-1}t_1t_2 + a_n t_2^2$$

est dite *forme caractéristique* de A.

Un calcul aisé conduit au lemme suivant :

Lemme. — *La forme caractéristique du produit AA' de deux substitutions normales est proportionnelle (égale à un facteur constant près) au déterminant fonctionnel des formes caractéristiques de A et A', multiplié par les facteurs fondamentaux communs à A et A'.*

6. Toutes les substitutions du groupe normal Γ ayant pour carré l'unité, le groupe linéaire α' se compose exclusivement de substitutions d'ordre deux. Cela n'est possible (Jordan, *Journal de Crelle*, t. 84, p. 111) que si α' est contenu dans le groupe tétraédrique et se compose de trois substitutions échangeables A, B, C dont chacune est identique au produit des deux autres. Les formes caractéristiques des trois substitutions A, B, C qui composent le groupe Γ sont donc

chacune proportionnelles au déterminant fonctionnel des deux autres.

Le groupe Γ se compose de la sorte ou bien :

1° De deux substitutions 1 et A, ou

2° De quatre substitutions 1, A, B, C échangeables entre elles; chacune des substitutions A, B, C est égale au produit des deux autres.

Lemme. — *Chacune des courbes invariantes* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *passe par tous les points fondamentaux de* Γ.

Soit a un de ces points; s'il est fondamental pour A, il est situé évidemment sur $\mathfrak{A}$. Si a est fondamental pour B, je dis que a n'en est pas moins situé sur $\mathfrak{A}$; d'après la définition même de la courbe invariante, il suffira de prouver que $A(a) = a$. Cela est aisé : $A(a)$ est fondamental pour BA (premier Mémoire, 4°) et se trouve sur la direction $\overline{\omega a}$: donc $A(a)$ se confond avec a (4°, lemme). C. Q. F. D.

Il n'est nullement nécessaire pour la démonstration que B soit normale. Le lemme précédent n'est donc qu'un cas particulier d'un théorème important dont l'énoncé se trouve plus loin (13°).

Au sujet de l'ordre des substitutions de Γ, on peut faire les hypothèses suivantes, quant au *type* auquel appartient Γ :

Types.	
I.....	Substitution unité seule.
II.....	Substitution quadratique A.
III.....	Substitution cubique A.
IV.....	Substitutions quadratiques A, B, C.
V.....	Substitutions quadratiques A, C et cubique B.
VI.....	Substitutions cubiques B, C et quadratique A.
VII.....	Substitutions cubiques A, B, C.

En ayant égard à ce que : 1° les substitutions de Γ sont échangeables; 2° à ce que chacune d'elles (sauf l'unité) est égale au produit des deux autres, et en appliquant les lemmes du 1°, on voit que les diverses substitutions qui composent les différents types de Γ peuvent se représenter par les symboles suivants, quant à leurs points fondamentaux :

Type I (pour mémoire).

Type II (deux points fondamentaux)

$$A \left\{ \begin{matrix} a & b \\ a & b \end{matrix} \right. .$$

Type III (quatre points fondamentaux)

$$A \left\{ \begin{matrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{matrix} \right. .$$

Type IV (trois points fondamentaux)

$$A \left\{ \begin{matrix} b & c \\ b & c \end{matrix} \right., \quad B \left\{ \begin{matrix} c & a \\ c & a \end{matrix} \right. \quad \text{et} \quad C \left\{ \begin{matrix} a & b \\ a & b \end{matrix} \right. .$$

Type V (quatre points fondamentaux)

$$A \left\{ \begin{matrix} b & a \\ b & a \end{matrix} \right., \quad C \left\{ \begin{matrix} c & d \\ c & d \end{matrix} \right., \quad B \left\{ \begin{matrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{matrix} \right. .$$

Type VI (cinq points fondamentaux)

$$A \left\{ \begin{matrix} b & c \\ b & c \end{matrix} \right., \quad B \left\{ \begin{matrix} a & d & e & c \\ a & d & e & c \end{matrix} \right., \quad C \left\{ \begin{matrix} a & d & e & b \\ a & d & e & b \end{matrix} \right. .$$

Type VII (six points fondamentaux)

$$A \left\{ \begin{matrix} b & c & b' & c' \\ b & c & b' & c' \end{matrix} \right., \quad B \left\{ \begin{matrix} a & c & a' & c' \\ a & c & a' & c' \end{matrix} \right., \quad C \left\{ \begin{matrix} a & b & a' & b' \\ a & b & a' & b' \end{matrix} \right. .$$

Nous allons construire successivement les six types normaux différents de l'unité. Je conviendrai d'appeler par la même lettre un fondamental et la forme linéaire binaire en z_1, z_2 qui, égalée à zéro, donne la direction de ce fondamental. Ainsi $a = a_2 z_1 - a_1 z_2$, ... Je me bornerai pour chaque substitution à donner sa *forme caractéristique* en t_1, t_2. Soit en effet $T(t_1, t_2)$ la forme caractéristique d'une substitution nor-

male A : on a

$$T = a_{n-2} t_1^2 + 2 a_{n-1} t_1 t_2 + a_n t_2^2,$$

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(a_{n-2} z_3 + a_{n-1}) \\ z_2 & z_2(a_{n-2} z_3 + a_{n-1}) \\ z_3 & -(a_{n-1} z_3 + a_n) \end{vmatrix};$$

on peut écrire par conséquent

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \dfrac{\partial T}{\partial t_1} \\ z_2 & z_2 \dfrac{\partial T}{\partial t_1} \\ z_3 & -\dfrac{\partial T}{\partial t_2} \end{vmatrix}, \qquad \text{où} \qquad t_1 = z_3, \qquad t_2 = 1.$$

La substitution A se trouve déterminée. La forme caractéristique est d'ailleurs l'équation de la courbe invariante rendue entière après qu'on a posé $z_3 = t_1 : t_2$.

7. Γ *est du type II.* — Prenons le système des coordonnées suivant

$$(zab) = z_3 = 0,$$

pour équation de $\overline{ab}$;

$$a = z_1 = 0, \qquad b = z_2 = 0$$

pour les directions $\overline{\omega a}$ et $\overline{\omega b}$.

Il vient par suite, puisque la conique $\mathfrak{A}$ touche $\overline{\omega a}$ en a et $\overline{\omega b}$ en b,

$$\mathfrak{A} = z_3^2 - z_1 z_2.$$

A a l'expression indiquée dans l'Introduction (groupe II).

8. Γ *est du type III.* — Prenons les coordonnées de façon que l'on ait

$$(zab) = z_3 = 0,$$

pour équation de $\overline{ab}$,

$$a = z_1 = 0, \qquad b = z_2 = 0$$

pour équations de $\overline{\omega a}$ et $\overline{\omega b}$.

La cubique $\mathfrak{A}$ a deux points de ramification en

$$z_1 = z_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad z_2 = z_3 = 0,$$

par suite

$$\mathfrak{A} = p z_3^2 + 2 z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 \mathrm{P}.$$

p et P étant linéaires en z_1, z_2; d'ailleurs

$$z_1 z_2 - p\mathrm{P} = cd,$$

à un facteur constant près.

Γ a la forme indiquée dans l'Introduction (groupe III).

9. Γ *est du type IV.* — Donnons pour coordonnées aux points

$$\begin{aligned} a \ldots\ldots\ & z_1 = z_3 = 0, & z_2 &= 1, \\ b \ldots\ldots\ & z_2 = z_3 = 0, & z_1 &= 1, \\ c \ldots\ldots\ & z_1 = z_2 = z_3 & &= 1. \end{aligned}$$

On trouve facilement, par la Géométrie ordinaire,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= z_3^2 \qquad\qquad - z_1 z_2, \\ \mathfrak{B} &= z_3^2 - 2 z_2 z_3 + z_1 z_2, \\ \mathfrak{C} &= z_3^2 - 2 z_1 z_3 + z_1 z_2, \end{aligned}$$

et l'on vérifie que le déterminant fonctionnel de deux formes caractéristiques est proportionnel à la troisième.

On trouve donc le groupe IV de l'Introduction.

10. Γ *est du type V.* — Donnons pour coordonnées aux points

$$\begin{aligned} a \ldots\ldots\ldots\ & z_1 = z_3 = 0, \\ b \ldots\ldots\ldots\ & z_2 = z_3 = 0. \end{aligned}$$

Il viendra, comme plus haut, pour $\mathfrak{A}$ (7)

$$\mathfrak{A} = z_3^2 - z_1 z_2,$$

et pour $\mathfrak{B}$ (8)

$$\mathfrak{B} = p z_3^2 + 2 z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 \mathrm{P}.$$

Enfin $\mathfrak{C}$ est proportionnel au déterminant fonctionnel des formes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$; donc

$$\mathfrak{C} = z_3^2 + (\mathrm{P} + p) z_3 + z_1 z_2.$$

Écrivons maintenant que le déterminant fonctionnel de $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ est proportionnel à $\mathfrak{A}$; on trouve la condition $p = \mathrm{P}$, qui est d'ailleurs suffisante. En résumé, on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= z_3^2 \qquad\qquad - z_1 z_2,\\
\mathfrak{B} &= p z_3^2 + 2 z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 p,\\
\mathfrak{C} &= z_3^2 + 2 p z_3 + z_1 z_2
\end{aligned}$$

(p = forme linéaire binaire en z_1, z_2).

On retrouve le groupe V de l'Introduction.

11. Γ *est du type VI.* — Donnons encore pour coordonnées aux points

$$b \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z_1 = z_3 = 0,$$

$$c \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z_2 = z_3 = 0.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= z_3^2 \qquad\qquad - z_1 z_2,\\
\mathfrak{B} &= p z_3^2 + 2 m z_2 z_3 + z_1 z_2 \mathrm{P},\\
\mathfrak{C} &= q z_3^2 + 2 n z_1 z_3 + z_1 z_2 \mathrm{Q}
\end{aligned}$$

(m, n, p, q, P, Q = formes linéaires binaires en z_1, z_2); et, en écrivant que le déterminant fonctionnel de deux formes quelconques est proportionnel à la troisième, on trouve

$$p = \mathrm{P} = n, \qquad q = \mathrm{Q} = m;$$

et

$$\mathfrak{A} = z_3^2 \qquad\qquad - z_1 z_2,$$
$$\mathfrak{B} = p z_3^2 + 2 q z_1 z_3 + z_1 z_2 p,$$
$$\mathfrak{C} = q z_3^2 + 2 p z_2 z_3 + z_1 z_2 q.$$

On trouve le groupe VI de l'Introduction en écrivant P pour q.

12. Γ *est du type VII.* — Prenons pour $z_3 = 0$ la droite $\overline{cc'}$. Il vient alors

$$\mathfrak{A} = p z_3^2 + 2 cc' z_3 + cc' \mathrm{P},$$
$$\mathfrak{B} = q z_3^2 + 2 cc' z_3 + cc' \mathrm{Q}$$

(p, P, q, Q, c, c' = formes linéaires binaires en z_1, z_2).

Le déterminant fonctionnel, après suppression de cc', donne

$$\mathfrak{C} = (p - q) z_3^2 + (p\mathrm{Q} - q\mathrm{P}) z_3^2 + cc'(\mathrm{Q} - \mathrm{P}).$$

Enfin la condition

$$p\mathrm{Q} + q\mathrm{P} = 2cc'$$

est nécessaire et suffisante pour que chaque forme soit proportionnelle au déterminant fonctionnel des deux autres.

On trouve ainsi le groupe VII de l'Introduction.

TROISIÈME PARTIE.

ÉTUDE DU GROUPE DIRECTEUR.

13. Nous nous proposons actuellement de formuler les relations qui existent entre la nature d'un groupe normal Γ et d'un groupe directeur Σ, qui appartiennent tous deux à un même groupe cubique G.

Lemme I. — *Un point fondamental du groupe* G *est situé sur* chacune *des courbes invariantes, qui appartiennent aux substitutions de* Γ.

Soient a un point fondamental quelconque de G et S une des sub-

stitutions de G pour lesquelles a est fondamental; soit A une substitution de Γ. Si a est fondamental pour A, a est sur $\mathfrak{A}$, sinon formons SA; $A(a)$ est fondamental pour SA et sur la droite $\overline{\omega a}$; par suite, $A(a) = a$ (**4**), a est situé sur $\mathfrak{A}$.

Corollaires. — *Si* Γ *se compose d'une substitution unique* A, *tous les points fondamentaux de* G *sont situés sur* $\mathfrak{A}$.

Si Γ *se compose de plus d'une substitution,* G *ne peut avoir pour points fondamentaux que les points communs à toutes les courbes invariantes.* Ainsi G ne peut avoir pour points fondamentaux :

1° Que les trois points a, b, c si Γ est du type IV (**6**);
2° Que les quatre points a, b, c, d si Γ est du type V (**6**);
3° Que les cinq points a, b, c, d, e si Γ est du type VI (**6**);
4° Que les six points a, b, c, a', b', c' si Γ est du type VII (**6**).

Enfin G ne peut être cubique si Γ est du type IV, puisqu'il faut quatre fondamentaux pour une substitution cubique.

Lemme II. — *Le groupe directeur* Σ *permute entre eux les* discriminants *des substitutions de* Γ.

J'appelle *discriminant* d'une substitution normale le discriminant de sa forme binaire caractéristique (**5**) ou, si l'on veut, le produit des directions fondamentales.

Pour démontrer le lemme, je remarque que les substitutions de G transforment les unes dans les autres les diverses courbes invariantes qui appartiennent aux substitutions de Γ. En effet, Γ est permutable aux substitutions de G par définition de (**5**), et, si A est normale, on a

$$S^{-1}AS = A',$$

S étant une substitution de G et A′ normale.

De l'égalité

$$S^{-1}AS = A',$$

on tire

$$S^{-1}A(z) = A'S^{-1}(z),$$

z étant un point *quelconque* du plan; si l'on place z sur $\mathfrak{A}$,

$$A(z) = z, \qquad S^{-1}(z) = A'S^{-1}(z),$$

et, tandis que z parcourt $\mathfrak{A}$, $S^{-1}(z)$ parcourt $\mathfrak{A}'$; la transformée $S\mathfrak{A}$ est donc $\mathfrak{A}'$, après suppression de facteurs fondamentaux.

Soit, par conséquent, la courbe invariante d'ordre $m (= 2$ ou $3)$

$$\mathfrak{A} = a_{m-2} z_3^2 + 2 a_{m-1} z_3 + a_m = 0;$$

appelons δ le discriminant

$$\delta = a_{m-1}^2 - a_{m-2} a_m.$$

Prenons dans G la substitution S d'ordre n et de directrice σ

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \sigma(z_1)p \\ z_2 & \sigma(z_2)p \\ z_3 & P \end{vmatrix}, \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} p = p_{n-2} z_3 + p_{n-1}, \\ P = P_{n-1} z_3 + P_n, \end{cases}$$

et les p et P désignent des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice; appelons Δ le déterminant d'ordre $2(n-1)$ en z_1, z_2

$$\begin{vmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ P_{n-1} & P_n \end{vmatrix} = \Delta;$$

$\Delta = 0$ représente le produit des $2(n-1)$ directions fondamentales de S.

La courbe $\mathfrak{A}$ passe $m-2$ fois par ω et *une* fois par *chacun* des points fondamentaux de S^{-1} (lemme I); par suite [premier Mémoire (**2**), théorème auxiliaire],

$$S\mathfrak{A} = p^{m-2} \Delta \mathfrak{A}',$$

$\mathfrak{A}'$ étant aussi une courbe invariante dont δ' soit le discriminant. D'ailleurs

$$\begin{aligned} S\mathfrak{A} &= p^{m-2} F \\ &= p^{m-2} [P^2 \sigma(a_{m-2}) + 2 P p \sigma(a_{m-1}) + p^2 \sigma(a_m)] = p^{m-2} \Delta \mathfrak{A}'. \end{aligned}$$

et enfin identiquement

$$(1) \qquad F = \Delta \mathfrak{A}'.$$

Le discriminant du premier membre de l'identité (1) est $\Delta^2 \sigma(\delta)$. En effet, en posant $z_3 = t_1 : t_2$, on voit que F est la transformée de la forme binaire

$$t = t_1^2 \sigma(a_{m-2}) + 2 t_1 t_2 \sigma(a_{m-1}) + t_2^2 \sigma(a_m)$$

par la substitution linéaire

$$\varpi = \begin{vmatrix} t_1 & p_{n-2} t_1 + p_{n-1} t_2 \\ t_2 & P_{n-1} t_1 + P_n t_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 & p \\ t_2 & P \end{vmatrix},$$

dont Δ est le déterminant; le discriminant de F est donc le produit du discriminant $\sigma(\delta)$ de t par le carré du déterminant Δ.

Le second membre de l'identité (1) a pour discriminant $\Delta^2 \delta'$; il vient, par suite,

$$\delta' = \sigma(\delta),$$

et le lemme est démontré, puisque δ' est le discriminant de A'. Les déplacements effectués par les substitutions S de G sur les substitutions de Γ ou, ce qui revient au même, sur leurs discriminants, forment un groupe T isomorphe à Σ.

Lemme III. — *Le groupe* T, *qui vient d'être défini, ne peut permuter entre elles que les substitutions normales de même ordre.*

Cela est évident; reprenons nos notations précédentes : δ' a pour ordre $2(m'-1)$, $m' =$ ordre A', mais $\delta' = \sigma(\delta)$ est d'ordre

$$2(m-1), \qquad \text{d'où} \qquad m' = m. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

14. Appliquons les trois lemmes précédents aux divers types de Γ, en laissant de côté les groupes I et IV (**6**). Si, en effet, Γ se réduit à l'unité, Σ est *a priori* un quelconque des groupes d'ordre fini con-

tenus dans le groupe linéaire à deux variables; si Γ est du type IV, G, comme on l'a vu, ne saurait être cubique.

Nous désignons, pour abréger, par la même lettre un point fondamental et la forme linéaire qui, égalée à zéro, donne l'équation de la direction fondamentale : ainsi $a = 0$ représentera la droite $\overline{\omega a}$, etc.

Passons maintenant à l'énumération des types.

15. *Γ est du type II* (**6**). — Une substitution quelconque σ de Σ laisse fixe [(**13**), lemme II] le discriminant ab de la substitution quadratique normale unique. Si l'on prend a pour z_1, b pour z_2, Σ dérive des deux substitutions

$$\sigma = (a)(b) = \begin{vmatrix} z_1 & k_1 z_1 \\ z_2 & k_2 z_2 \end{vmatrix}, \quad k_i = \text{racine de l'unité}$$

et

$$\tau = (ab) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix}.$$

16. *Γ est du type III* (**6**). — Σ laisse fixe le discriminant $abcd$ de la substitution cubique normale unique. Σ est contenu dans le groupe octaédrique (Jordan, *Journal de Crelle*, t. 84, p. 111).

17. *Γ est du type V* (**6**). — Il y a dans Γ deux substitutions quadratiques A et C et une cubique B. Le groupe T [(**13**), lemmes II et III] dérive de la substitution

$$(B)(AC),$$

et Σ dérive des substitutions

$$(ab)(cd) \quad \text{et} \quad (ac)(bd), \quad (a)(b)(cd),$$

puisqu'il doit laisser fixe le discriminant de B et permuter entre eux les discriminants de A et C. Σ est encore contenu dans le groupe octaédrique.

18. *Γ est du type VI* (**6**). — Alors T [(**13**), lemmes II et III] se réduit à la substitution

$$(A)(BC),$$

et Σ dérive des substitutions

$$\sigma = (bc)(d)(ac), \qquad \tau = (c)(b)(adc),$$

puisque Σ doit laisser fixe le discriminant bc de A et permuter entre eux les discriminants $bade$ et $cade$ de C et B.

Si l'on prend b pour z_1, c pour z_2; si $d = z_1 - z_2 = 0$, il vient

$$\sigma = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \end{vmatrix}, \qquad \theta^3 = 1, \qquad \tau = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix}.$$

19. Γ *est du type VII* (**6**). — T [(**13**), lemmes II et III] dérive de

$$(\mathrm{ABC}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{A})(\mathrm{BC}),$$

et est le groupe général entre trois lettres. Σ doit permuter entre eux les discriminants

$$bcb'c', \quad aca'c', \quad aba'b'$$

de A, B, C; Σ permute entre eux les trois *couples*

$$aa', \quad bb', \quad cc'.$$

Σ est isomorphe, sans mériédrie, à un groupe U non primitif entre six lettres; par rapport à U, les trois systèmes de non-primitivité sont les trois couples précédents; Σ est le même qu'au n° **18**.

Après avoir exposé les propriétés générales des groupes Σ et Γ, qui appartiennent à un même groupe cubique G, nous allons faire une application de ces principes pour la construction effective d'une classe nombreuse de groupes cubiques, c'est-à-dire aux groupes normo-linéaires.

QUATRIÈME PARTIE.

GROUPES NORMO-LINÉAIRES.

20. J'appelle groupe *normo-linéaire* un groupe cubique formé par la combinaison du groupe normal Γ avec un groupe linéaire L, évidemment isomorphe à Σ.

Les substitutions l de L transforment évidemment les unes dans les autres les courbes invariantes de Γ et de la façon indiquée par la nature du groupe T (**13**, lemme II).

Si Γ se réduit à l'unité, G se réduit à L et devient l'un quelconque des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire homogène à trois variables (*voir* Camille Jordan, *Journal de Crelle*, t. 84).

Si Γ est du type II ou IV, G est quadratique : il est contenu dans le type I du premier Mémoire.

Il suffira donc de supposer Γ du type III, V, VI ou VII (**6**).

21. Γ *est du type III* (**6**). — Les substitutions l de L doivent laisser fixe la courbe $\mathfrak{A}$; elles laissent fixe ω, puisqu'elles sont linéaires (**5**), et aussi la tangente en ω à $\mathfrak{A}$; L dérive, par conséquent, d'une substitution unique l de directrice σ :

$$l=(ab)(cd), \qquad l=(d)(abc), \qquad l=(abcd), \qquad l=(a)(b)(cd).$$

Prenons l sous la forme canonique; comme l est d'ordre fini, cette forme canonique sera toujours

$$l=|\, z_1 \quad z_2 \quad z_2 \quad l_1 z_1 \quad l_2 z_2 \quad z_3 \,| \qquad (l_1^m = l_2^m = 1),$$

où

$$m = 2, 3, 4 \qquad \text{et} \qquad l_1 \gtrless l_2,$$

puisque σ n'est pas l'unité.

La tangente en ω à $\mathfrak{A}$ reste invariable par l : on peut donc écrire

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2p_2 z_3 + P_3 = 0;$$

p_2, P_3 sont des formes binaires en z_1, z_2, d'ordre égal à l'indice.

Lemme I. — *La conique fondamentale* $\mathfrak{A}' = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z_3}$ *de* A *est indécomposable.*

En effet, $\mathfrak{A}'$ est la conique des cinq points ω, a, b, c, d et touche $\mathfrak{A}$ en ω; supposons $\mathfrak{A}' = z_2 D$, car si $\mathfrak{A}'$ se décompose en deux droites, l'une est la tangente $z_2 = 0$ en ω à $\mathfrak{A}$. Aucun des points a, b, c, d ne peut être sur $z_2 = 0$, car alors il se confondrait avec ω; la droite $D = 0$

coupe la cubique générale φ du réseau de A en quatre points a, b, c, d, $\varphi = D\varphi'$, $\varphi' = 0$ étant une conique; A est quadratique, ce qui est absurde.

Lemme II. — *On ne peut avoir dans l'expression de l, $l_1 = 1$.*

Supposons, en effet,

$$l = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_1 \quad \lambda z_2 \quad z_3 \; |;$$

appelons r le point $z_1 = z_3 = 0$; l laisse fixe toute droite D issue de r et aussi la conique $\mathfrak{A}'$; l laisse fixes ou permute entre eux les deux points u et u', où D coupe $\mathfrak{A}'$, et σ laisse fixes ou permute entre elles les directions $\overline{\omega u}$ et $\overline{\omega u'}$; σ ne peut les laisser fixes, car on aurait *constamment* ($u = 0$ étant l'équation de $\overline{\omega u}$, etc.),

$$uu' = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 = 2),$$

tandis que D tournerait autour de r. On a nécessairement ainsi

$$\sigma = (uu'), \qquad \sigma^2 = 1, \qquad l^2 = 1, \qquad \lambda = -1.$$

Cela posé, appelons w, w', w'' les trois points où D coupe $\mathfrak{A}$; puisque $\sigma^2 = 1$, on a *constamment*, tandis que D tourne autour de r,

$$\sigma = (w)(w'w'').$$

Le point w étant fixe se confond avec r, qui est, par suite, sur $\mathfrak{A}$. Appelons $v_i (i = 1, 2, 3, 4)$ les points de contact des tangentes menées de r à $\mathfrak{A}$; l laisse fixe *chacun* des points v et σ chacune des directions $\overline{\omega v_i}$; par suite, à un facteur constant près,

$$v_1 v_2 v_3 v_4 = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 = 4).$$

Aucune des directions v ne peut être $z_1 = 0$, car la droite $z_1 = 0$ couperait $\mathfrak{A}$ en quatre points, savoir : en ω, en r et deux fois en v. La droite $z_2 = 0$ couperait, par suite, $\mathfrak{A}$ en quatrep oints v_1, v_2, v_3, v_4, ce qui est absurde, et le lemme est démontré.

Puisque, dans l'expression de l, $l_1 \gtrless 1$, le point $z_2 = z_3 = 0$ est le *seul* point de la droite $z_2 = 0$, que l laisse fixe; l laisse fixe le point tangentiel t de ω, les coordonnées de t sont, par suite, $z_2 = z_3 = 0$, et il vient, pour $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2p_2 z_3 + z_2 P_2 = 0.$$

Remarquons qu'on ne peut avoir $\sigma = (a)(b)(cd)$, car alors l'une des directions a ou b se confondrait avec $z_2 = 0$, et un point fondamental viendrait en ω, ce qui est absurde.

Il suffira donc de faire successivement, pour examiner tous les cas possibles,

$$l = (ab)(cd), \qquad l = (d)(abc), \qquad l = (abcd).$$

22. Prenons d'abord

$$l = (ab)(cd).$$

On ne pourra avoir, pour la substitution l (**21**, lemme II), d'autre expression que

$$l = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & -z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Considérons maintenant

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2p_2 z_3 + z_2 P_2 = 0;$$

l laisse fixe la conique $\mathfrak{A}'$, et σ transforme en elle-même p_2, à un facteur constant près; p_2 ne peut être divisible par z_2 (**21**, lemme I) : p_2 ne contient donc que des puissances paires de z_1, z_2 et

$$p_2 = p_{21} z_1^2 + p_{22} z_2^2.$$

Considérons le discriminant

$$\delta = abcd = p_2^2 - z_2^2 P_2;$$

σ laisse δ fixe (invariable à un facteur constant près), δ n'est pas divisible par z_1 ou z_2, puisque ni $z_1 = 0$ ni $z_2 = 0$ ne sont des directions fondamentales; δ ne contient, par suite, que des puissances paires de

z_1, z_2; p_2 est dans le même cas. Il en est donc pareillement de P_2 et

$$P_2 = P_{21} z_1^2 + P_{22} z_2^2.$$

Les conditions sont d'ailleurs suffisantes, et l'on retrouve le groupe du type VIII de l'Introduction, en supprimant les indices de P et p devenus inutiles.

23. Prenons maintenant

$$l = (d)(abc).$$

La direction d ne peut être que $z_1 = 0$. Je prends pour $z_3 = 0$ la droite $\overline{td}$ ($t =$ point tangentiel $z_2 = z_3 = 0$ de ω); d est le point de ramification de $\mathfrak{A}$, et il vient

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2p z_1 z_3 + z_1 z_2 P = 0;$$

p, $P =$ forme linéaire binaire en z_1, z_2. l laisse fixe $\mathfrak{A}$, et σ laisse fixe $z_1 p$; comme $z_1 p$ n'est pas divisible par z_2 (**21**, lemme I), $p = k z_1$, $k =$ const. Le discriminant

$$\delta = abc = k^2 z_1^4 - z_1 z_2^2 P$$

est égal à $z_1(z_1^3 - z_2^3)$, puisqu'on peut prendre $a = z_1 - z_2$. Il est nécessaire donc d'avoir

$$P = k^2 z_2$$

et

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2k z_1^2 z_3 + k^2 z_1 z_2^2 = 0.$$

Écrivons que l transforme la courbe $\mathfrak{A}$ en elle-même, il viendra

$$l_2 = l_1^2 = l_1 l_2^2;$$

d'où

$$l_1 = 0, \qquad l_2 = \theta^2, \qquad \theta^2 + \theta + 1 = 0.$$

On trouve ainsi le type IX de l'Introduction, en écrivant $k z_3$ au lieu de z_3.

24. Prenons enfin

$$l = (abcd), \qquad \mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2p_2 z_3 + z_2 P_2 = 0.$$

Comme précédemment, on démontre que $p_2 = kz_1^2$; on peut supposer $a = z_1 - z_2$, et alors le discriminant $\delta = abcd = z_1^4 - z_2^4$ à un facteur constant près, mais

$$\delta = k^2 z_1^4 - z_2^2 P_2;$$

par conséquent,

$$P_2 = k^2 z_2^2$$

et

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2k z_1^2 z_3 + k^2 z_2^3 = 0;$$

écrivons que l laisse fixe la courbe $\mathfrak{A}$, il viendra

$$l_2 = l_1^2 = l_2^3.$$

On ne peut supposer $l_2 = 1$, $l_1 = \pm 1$, car alors σ et l seraient d'ordre un ou deux, mais non quatre; par conséquent,

$$l_2 = -1, \qquad l_1 = i = \sqrt{-1},$$

On retrouve le type X de l'Introduction, en écrivant kz_3 au lieu de z_3.

25. Γ *est du type* V (**6**). — Les substitutions de L laissent fixe la cubique $\mathfrak{B}$; par suite, on démontrera, comme plus haut (**21**), que L dérive d'une seule substitution l d'ordre $m = 2, 3, 4$. D'ailleurs L laisse fixes ou permute entre eux les discriminants ab et cd de A et de C; par suite, m ne peut être trois; si $m = 2$, $l = (ab)(cd)$ et laisse fixes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$, ou $l = (ac)(bd)$ et permute entre eux $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$. Si $m = 4$, $l = (acbd)$; on doit retrouver, par conséquent, pour $\mathfrak{B}$, les propriétés démontrées pour $\mathfrak{A}$ (**22** et **24**).

Lemme. — *On ne peut avoir* $l = (ac)(bd)$.

Prenons les coordonnées suivantes

$$a(z_1 = z_3 = 0), \qquad b(z_2 = z_3 = 0)$$

et, pour l, l'expression

$$l = \left| \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_2 & z_1 & z_3 \end{matrix} \right|.$$

La conique $\mathfrak{A}$ passe par b et possède en a un point de ramification; par suite,

$$\mathfrak{A} = z_3^2 + 2kz_1z_3 + \mathrm{K}z_1z_2 = 0 \qquad (k, \mathrm{K} = \text{const.}).$$

Pour $\mathfrak{C}$, en effectuant sur $\mathfrak{A}$ la substitution l, puisque l permute A et C, il vient

$$\mathfrak{C} = z_3^2 + 2kz_2z_3 + \mathrm{K}z_1z_2 = 0.$$

Le déterminant fonctionnel des formes caractéristiques de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ est

$$(1) \qquad k(z_1 - z_2)(z_3^2 - \mathrm{K}z_1z_2),$$

mais ce déterminant doit être $\mathfrak{B}$ à un facteur constant près, ce qui est impossible, puisque la courbe (1) est décomposable.

Le lemme est ainsi démontré.

Il nous suffira, par conséquent, de faire $l = (ab)(cd)$ et $l = (acbd)$.

26. Faisons $l = (ab)(cd)$, et prenons les mêmes coordonnées qu'au n° **10**, c'est-à-dire $a(z_1 = z_3 = 0)$, $b(z_2 = z_3 = 0)$. Il viendra, pour l, l'expression

$$l = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_2 \quad z_1 \quad z_3 \; |.$$

La tangente en ω à $\mathfrak{B}$ est $p = 0$, elle doit rester fixe, et, par suite, p est, à un facteur constant près, $z_1 + z_2$ ou $z_1 - z_2$.

$\mathfrak{B}$ a les mêmes propriétés que $\mathfrak{A}$ (**22**); on vérifie aisément que l laisse fixe toute droite issue du point tangentiel de ω par rapport à $\mathfrak{A}$; il doit en être de même du point tangentiel de ω par rapport à $\mathfrak{B}$: ce point doit donc être

$$z_1 + z_2 = z_3 = 0$$

et enfin

$$p = k(z_1 + z_2) \qquad (k = \text{const.})$$

On a ainsi

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathfrak{A} = & z_3^2 & - z_1z_2 = 0 \\ \mathfrak{B} = & k(z_1 + z_2)z_3^2 + 2z_1z_2z_3 & + kz_1z_2(z_1 + z_2) = 0 \\ \mathfrak{C} = & z_3^2 + 2k(z_1 + z_2)z_3 + z_1z_2 & = 0 \end{array}\right\}.$$

Nous avons construit le groupe XI de l'Introduction.

27. Faisons $l = (acbd)$, et prenons l sous sa forme canonique (**24**); il viendra

$$l = \left| \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & iz_1 & -z_2 & z_3 \end{matrix} \right|$$

et

$$\mathfrak{B} = z_2 z_3^2 + 2 z_1^2 z_3 + z_2^3 = 0.$$

Les coordonnées des points fondamentaux sont :

$$\begin{array}{llll} \text{Pour } a, & z_1 = 1, & z_2 = 1, & z_3 = -1; \\ \text{» } c, & z_1 = i, & z_2 = -1, & z_3 = -1; \\ \text{» } b, & z_1 = -1, & z_2 = 1, & z_3 = -1; \\ \text{» } d, & z_1 = -i, & z_2 = -1, & z_3 = -1. \end{array}$$

Remarquons que l'on a

$$\mathfrak{A} = (zab)^2 - \mathrm{K}ab, \qquad \mathfrak{C} = (zcd)^2 - \mathrm{K}'cd,$$

K et K′ étant des constantes, que $\mathfrak{A}$ passe par c et d, $\mathfrak{C}$ par c et d. On construit aisément les coniques $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$, grâce aux valeurs ci-dessus des coordonnées de a, b, c, d. On trouve ainsi, pour les équations des trois courbes invariantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = z_3^2 + 2 z_2 z_3 + 2 z_1^2 - z_2^2 = 0 \\ \mathfrak{B} = z_2 z_3^2 + 2 z_1^2 z_3 + z_2^3 = 0 \\ \mathfrak{C} = z_3^2 - 2 z_2 z_3 - 2 z_1^2 - z_2^2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Nous avons construit le groupe XII de l'Introduction.

28. Γ *est du type VI* (**6**). — Prenons les mêmes coordonnées qu'au n° **11**. Faisant usage des propriétés démontrées au n° **18**, on voit que L dérive des deux substitutions

$$s = (bc)(d)(ac), \qquad t = (b)(c)(ade).$$

Nous avons pris, pour les coordonnées de

$$\begin{array}{ll} b \ldots\ldots\ldots\ldots & z_1 = z_3 = 0, \\ c \ldots\ldots\ldots\ldots & z_2 = z_3 = 0; \end{array}$$

achevons de déterminer les coordonnées en prenant

$$d \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z_1 = z_2 = z_3.$$

Il viendra

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad t = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (\theta^2 + \theta + 1 = 0).$$

Il reste à déterminer les fonctions linéaires p et P qui entrent dans l'expression de $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{B}$ (**11**). La substitution linéaire s laisse fixes les courbes $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ et, par suite, les tangentes $p = 0$ et $P = 0$ en ω à ces courbes; p ne peut être z_1, P ne peut être z_2, parce que $\mathfrak{B}' = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z_3}$ ou $\mathfrak{C}' = \frac{\partial \mathfrak{C}'}{\partial z_3}$ se décomposeraient (**21**, lemme I); ainsi

$$p = k z_2, \qquad P = K z_1 \qquad (k, K = \text{const.}).$$

Le discriminant δ, qui doit être $(z_1^3 - z_2^3) z_1$ pour $\mathfrak{B}$ à un facteur constant près, est

$$z_1 (K^2 z_1^3 - k^2 z_2^3),$$

d'où

$$K^2 = k^2;$$

on peut toujours supposer $K = k$, puisqu'il est licite de changer z_3 en $-z_3$. Il vient, en définitive,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = \quad z_3^2 \qquad\qquad - z_1 z_2 = 0 \\ \mathfrak{B} = z_2 z_3^2 + 2 z_1^2 z_3 + z_1 z_2^2 = 0 \\ \mathfrak{C} = z_1 z_3^2 + 2 z_2^2 z_3 + z_1^2 z_2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Nous obtenons le groupe XIII de l'Introduction.

29. Γ *est du type VII* (**6**). — Le groupe T, formé par les déplacements des trois courbes invariantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, est isomorphe (**15**, lemmes II et III, et **19**) à L; je dis que l'isomorphisme est holoédrique,

et qu'à la substitution unité

$$(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})(\mathfrak{C})$$

de T correspond dans L la substitution unité. Supposons qu'il en soit autrement, et soit l une substitution de L, ayant σ pour directrice et laissant fixes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; σ laisse fixes les trois directions de tangentes menées de ω à $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$: donc $\sigma = 1$ et $l = 1$, si ces trois directions sont distinctes. S'il y avait deux tangentes confondues, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, par exemple, se toucheraient en ω; or $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ se touchent déjà en c et c', se coupent en a, a', b, b'; le nombre total des intersections serait de dix, savoir : deux en chacun des points ω, c, c' et une en chacun des points a, b, a', b'; deux cubiques indécomposables ne peuvent se couper en plus de neuf points sans coïncider, ce qui n'est pas. Il est donc nécessaire que l'isomorphisme de T et L soit holoédrique.

Le groupe T dérive des deux substitutions

$$s' = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \qquad \text{et} \qquad t' = (\mathfrak{A})(\mathfrak{B}\mathfrak{C});$$

soient s et t les substitutions correspondantes de L; prenons s sous forme canonique : il viendra

$$s = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad \theta z_1 \quad \theta^2 z_2 \quad z_3 \; |,$$
$$t = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_2 \quad z_1 \quad z_3 \; |.$$

Considérons $\mathfrak{A}$; le point tangentiel de ω est (**26**)

$$z_3 = z_1 + z_2 = 0.$$

Posons

$$\mathfrak{A} = a_1 z_3^2 + 2a_2 z_3 + a_3 = 0,$$
$$\mathfrak{B} = b_1 z_3^2 + 2b_2 z_3 + b_3 = 0,$$
$$\mathfrak{C} = c_2 z_3^2 + 2c_2 z_3 + c_3 = 0,$$

où les a, b, c sont des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice. Il viendra

$$a_1 = z_1 + z_2, \qquad a_3 = (z_1 + z_2) q_2,$$

$q_2 =$ forme quadratique en z_1, z_2. Écrivons que t laisse fixe $\mathfrak{A}$, il

viendra, en désignant par p, p', q, q' des constantes,

$$a_2 = p(z_1^2 + z_2^2) + p' z_1 z_2,$$
$$q_2 = q(z_1^2 + z_2^2) + q' z_1 z_2.$$

On a, par suite,

$$\begin{aligned}
a_1 &= z_1 + z_2,\\
a_2 &= p(z_1^2 + z_2^2) + p' z_1 z_2,\\
a_3 &= [q(z_1^2 + z_2^2) + q' z_1 z_2](z_1 + z_2);\\
b_1 &= 0 z_1 + 0^2 z_2,\\
b_2 &= \ldots\ldots\ldots,\\
b_3 &= \ldots\ldots\ldots;\\
c_1 &= 0^2 z_1 + 0 z_2,\\
c_2 &= p(0 z_1^2 + 0^2 z_2^2) + p' z_1 z_2,\\
c_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Le déterminant fonctionnel de $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ doit être égal à $aa'\mathfrak{A}$, à un facteur constant près. Ce déterminant est

$$z_3^2 \begin{vmatrix} 0\ z_1 + 0^2 z_2 & p(0^2 z_1^2 + 0\ z_2^2) + p' z_1 z_2 \\ 0^2 z_1 + 0\ z_2 & p(0\ z_1^2 + 0^2 z_2^2) + p' z_1 z_2 \end{vmatrix} + \ldots;$$

identifions avec $\mathrm{K} aa'\mathfrak{A}$, $\mathrm{K} = \text{const.}$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}\, aa'(z_1 + z_2) &= \begin{vmatrix} 0 z_1 + 0^2 z_2 & p(0^2 z_1^2 + 0 z_2^2) + p' z_1 z_2 \\ 0^2 z_1 + 0 z_2 & p(0 z_1^2 + 0^2 z_2^2) + p' z_1 z_2 \end{vmatrix}\\
&= (0 - 0^2)(z_1 - z_2)\\
&\quad \times [p(0 z_1^2 + 0^2 z_2^2) + p' z_1 z_2 + p(z_1 + z_2)(0^2 z_1 + 0 z_2)].
\end{aligned}$$

Le second membre de l'identité est divisible par $z_1 + z_2$: cela exige $p' = -p$, et l'identité devient

$$\mathrm{K} aa'(z_1 + z) = -p(0 - 0^2)(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)^2;$$

de là résulte

$$\begin{aligned} aa' &= z_1^2 - z_2^2, \\ bb' &= \theta^2 z_1^2 - \theta z_2^2, \\ cc' &= \theta z_1^2 - \theta^2 z_2^2, \end{aligned}$$

à des facteurs constants près.

Le discriminant $bb'cc'$ de $\mathfrak{A}$ est donc, à un facteur constant près,

$$z_1^4 + z_1^2 z_2^2 + z_2^4;$$

identifions avec $a_2^2 - a_1 a_3$, c'est-à-dire avec

$$p^2(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2)^2 - (z_1 + z_2)^2 [q(z_1^2 + z_2^2) + q' z_1 z_2],$$

il vient

$$q' = -q, \qquad q = -2p^2.$$

L'expression de $\mathfrak{A}$ est par conséquent, en écrivant pz_3 au lieu de p, ce qui est licite,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = (z_1 + z_2) z_3^2 &+ 2(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2) z_3 \\ &- 2(z_1 + z_2)(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2) = 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ s'obtiennent en transformant $\mathfrak{A}$ par s.

Nous avons construit le groupe XIV de l'Introduction.

CINQUIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

50. Nous ne construirons pas le tableau complet des groupes cubiques d'ordre fini, qui sont fort nombreux (une cinquantaine). Nous nous bornerons à montrer, sur un exemple simple, comment on peut donner l'expression effective des substitutions d'un groupe cubique G d'ordre fini, après qu'on a choisi le groupe normal Γ et le groupe directeur Σ.

L'exemple consistera dans la construction de tous les groupes G, dont le groupe directeur Σ est formé par les trois puissances de la substitution

$$\sigma = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \end{vmatrix}, \qquad \theta^2 + \theta + 1 = 0.$$

En vertu des applications précédentes, Γ ne peut être ni du type IV (**6**), car alors G ne peut être cubique [(**13**), corollaires du lemme I], ni du type V (**6**), car alors Σ ne contient pas de substitution d'ordre trois (**16**). Nous allons supposer successivement Γ des types I, II, III, VI et VII (**6**).

31. Γ *est du type I.* — G n'a d'autre substitution normale que l'unité; appelons S la substitution de G qui correspond à σ; $S^3 = 1$, $S^2 = S^{-1}$: le carré de S doit être, par suite, cubique comme S, S et S^{-1} doivent avoir deux et seulement deux points fondamentaux communs (**1**), lemme I).

Remarquons d'abord qu'on ne peut avoir

$$S \left\{ \begin{matrix} a \ldots \\ a \ldots \end{matrix} \right.,$$

car a ne serait plus fondamental pour $S^2 = S^{-1}$, ce qui est contradictoire dans les termes; σ déplace, par suite, toutes les directions fondamentales. Prenons

$$S \left\{ \begin{matrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{matrix} \right.,$$

on aura

$$\sigma = (aa'a'')\ldots(dd'd''),$$

et, comme S et S^{-1} ont deux fondamentaux communs, les cycles de σ se réduisent à deux $\sigma = (aa'a'')(cc'c'')$, et il vient pour S

$$S \left\{ \begin{matrix} a & a' & c & c' \\ a' & a'' & c' & c'' \end{matrix} \right..$$

En un mot, nous pouvons écrire

$$S\left\{\begin{matrix} a & b & a' & b' \\ b & c & b' & c' \end{matrix}\right..$$

Désignons toujours par a le facteur linéaire qui, annulé, donne l'équation de la droite $\overline{\omega a}$, etc., on a

$$(1) \qquad \sigma(a) = c, \qquad \sigma(b) = a, \qquad \sigma(c) = b,$$

$$(1') \qquad \sigma(a') = c', \qquad \ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

et, de plus,

$$(2) \qquad S(zbb') = aa'(zbb').$$

Prenons pour $z_3 = 0$ l'équation de la droite $\overline{bb'}$, il viendra (2)

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(pz_3 + bb') \\ z_2 & \theta^2 z_2(pz_3 + bb) \\ z_3 & kaa'z_3 \end{vmatrix},$$

où p est linéaire en z_1, z_2, $k =$ const. Si nous formons les puissances de S en tenant compte des égalités (1) et (1'), il viendra, après suppression du facteur cc',

$$S^2 = \begin{vmatrix} z_1 & \theta^2 z_1 \{ z_3[p + k\sigma(p)] + bb' \} \\ z_2 & \theta z_2 \{ z_3[p + k\sigma(p)] + bb' \} \\ z_3 & k^2 cc' z_3 \end{vmatrix},$$

et, pareillement pour S^3,

$$S^3 = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \{ z_3[p + k\sigma(p) + k^2\sigma^2(p)] + bb' \} \\ z_2 & z_2 \{ z_3[p + k\sigma(p) + k^2\sigma^2(p)] + bb' \} \\ z_3 & k^3 bb' z_3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 = |z_i \quad bb'z_i| \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Cela exige

$$k^3 = 1, \qquad p + k\sigma(p) + k^2\sigma^2(p) = 0:$$

posons $p = p_1 z_1 + p_2 z_2$: il viendra, pour la seconde condition, l'identité

$$(3) \qquad p_1 z_1 (1 + k\theta + k^2\theta^2) + p_2 z_2 (1 + k\theta^2 + k^2\theta) = 0.$$

Si $p_1 p_2 \gtrless 0$, $k = 1$; si $p_j = 0$ $(j = 1, 2)$, $k = 1$ ou $k = \theta^{-j}$. Il vient par suite, pour S, les deux formes suivantes, que nous appellerons *première et deuxième espèce* (types XV et XVI de l'Introduction).

Première espèce :

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 [(p_1 z_1 + p_2 z_2) z_3 + bb'] \\ z_2 & \theta^2 z_2 [(p_1 z_1 + p_2 z_2) z_3 + bb'] \\ z_3 & aa' z_3 \end{vmatrix}.$$

Seconde espèce :

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 (p_0 z_1 z_3 + bb') \\ z_2 & \theta^2 z_2 (p_0 z_1 z_3 + bb') \\ z_3 & \theta aa' z_3 \end{vmatrix},$$

où

$$bb' = b_{11} z_1^2 + 2 b_{12} z_1 z_2 + b_{22} z_2^2 \quad (^1),$$
$$aa' = b_{11} \theta^2 z_1^2 + 2 b_{12} z_1 z_2 + b_{22} \theta z_2^2.$$

32. Γ *est du type II* (**6**). — La substitution S est échangeable à A (**13**) et laisse invariable la conique invariante $\mathfrak{A}$. Je dis que l'on peut supposer que $S^3 = 1$. Si, en effet, on avait $S^3 = A$, il suffirait de considérer SA au lieu de S, car $(SA)^3 = S^3 A = 1$.

Lemme. — *La substitution* S, *telle que* $S^3 = 1$, *ne peut être cubique.*

Appelons d et d' les fondamentaux de A; on aura, pour S (**31**),

$$S \begin{cases} ab & a'b' \\ bc & b'c' \end{cases} \qquad \sigma = (d)(d')(abc)(a'b'c');$$

(1) Nous pouvons d'ailleurs prendre les coordonnées de façon à avoir $b = z_1 - z_2$ et supprimer les accents devenus inutiles.

il est donc impossible que A et S aient un fondamental au moins commun, comme l'exigerait le lemme I du n° **1**.

Pour construire G, il suffira de combiner à A la substitution quadratique s; on démontrera d'ailleurs, comme au n° **31**, que

$$s \left\{ \begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix} \right. .$$

Prenons, comme au n° **7**, $d(z_1 = z_3 = 0)$ et $d'(z_2 = z_3 = 0)$; σ restera sous forme canonique, puisqu'elle laisse fixe dd'. Il viendra

$$\mathfrak{A} = z_3^2 - z_1 z_2;$$

remarquons que $s(d) = d$, $s(d') = d'$; on aura, en désignant par p, q, des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(p_0 z_3 + p_1) \\ z_2 & \theta^2 z_2(p_0 z_3 + p_1) \\ z_3 & q_1 z_3 + z_1 z_2 \end{vmatrix} \qquad (p_0 z_1 z_2 - p_1 q_1 = \lambda ab).$$

Si nous écrivons que s^2 est quadratique après séparation du facteur a, nous avons, entre autres, la condition

$$(1) \qquad \sigma(p_1) + q_1 = a,$$

à un facteur constant près.

D'ailleurs (**13**), puisque b et c sont sur $\mathfrak{A}$, on a identiquement

$$s\mathfrak{A} = \mathrm{K}ab\mathfrak{A} \qquad (\mathrm{K} = \text{const.});$$

d'où, identifiant les coefficients de z_3 dans les deux membres,

$$(2) \left\{ \begin{matrix} q_1^2 - p_0 z_1 z_2 = \mathrm{K}ab, & & p_1^2 - z_1 z_2 = \mathrm{K}ab, \\ q_1 = p_0 p_1, & \text{avec} & p_0 z_1 z_2 - p_1 q_1 = \lambda ab, \\ & (\lambda = \text{const.}). & \end{matrix} \right.$$

De ces identités on tire $p_0 = 1$, $q_1 = p_1$. Achevons de déterminer le

système des coordonnées en prenant $b(z_1 = z_2 = z_3 = 1)$, $b = z_1 - z_2$, $a = \theta z_1 - \theta^2 z_2$, $c = \theta^2 z_1 - \theta z_2$.

Pour satisfaire aux identités (2), il est nécessaire que p_1 soit proportionnel à l'une des fonctions $\theta^2 z_1 + \theta z_2$ ou $\theta^2 z_1 - \theta z_2$; en ayant égard à l'identité (1), on voit que

$$p_1 = \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2) \qquad (\mu = \text{const.}).$$

L'expression de s devient

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1[z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2[z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_3 & \mu z_3(\theta^2 z_1 - \theta z_2) + z_1 z_2 \end{vmatrix};$$

écrivons que le point $b(z_1 = z_2 = z_3 = 1)$ est fondamental; il vient

$$1 + \mu(\theta^2 - \theta) = 0;$$

on a enfin construit ainsi le type XVII de l'Introduction.

33. Γ *est du type III* (**6**). — On démontrera, comme plus haut (**32**), qu'il est permis de supposer, dans tous les cas, $S^3 = 1$. Nous adjoindrons successivement à A pour construire G une substitution quadratique s ou cubique S, ayant toutes deux pour cube l'unité.

Soit $abcd$ le discriminant de A; on aura (**15**)

$$\sigma = (d)(abc)$$

et (**32**)

$$s \begin{cases} a' & b' \\ b' & c' \end{cases};$$

d'où

$$\sigma = (d)(abc)(a'b'c');$$

mais A et s ont au moins un fondamental commun; cela n'est possible que si

$$a = a', \qquad b = b', \qquad c = c'$$

et

$$s \left\{ \begin{matrix} a & b \\ b & c \end{matrix} \right. .$$

La direction $d = 0$ reste invariable par σ, d'où $d = z_1$; d'ailleurs,

$$s(zbd) = a(zbd);$$

si nous prenons, par conséquent, $z_3 = 0$ pour équation de la droite $\overline{bd}$, on aura

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(zab) \\ z_2 & \theta^2 z_2(zab) \\ z_3 & a(zbd) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(\lambda z_3 + \mu b) \\ z_2 & \theta^2 z_2(\lambda z_3 + \mu b) \\ z_3 & a z_3 \end{vmatrix},$$

avec la condition $\mu^2 + \mu + 1 = 0$.

Appelons u le troisième point où $\overline{bd}$ rencontre $\mathfrak{A}$; puisque $\overline{bd}$ reste fixe pour s, u reste aussi un point fixe; la direction $\overline{\omega u}$ a pour équation $z_2 = 0$ ou $z_1 = 0$; cette seconde supposition est impossible, car $\overline{bd}$ toucherait $\mathfrak{A}$ en d ($z_1 = 0$) et passerait par ω, puisque d est un point de ramification; il y aurait deux points fondamentaux b et d en ligne droite avec ω, ce qui est absurde (*4*, lemme). En résumé, si l'on désigne par q une forme linéaire en z_1, z_2 et par k une constante, il vient

$$\mathfrak{A} = q z_3^2 + 2 b z_1 z_3 + k z_1 z_2 b = 0$$

et, puisque le discriminant est $abcd$,

$$(1) \qquad b z_1 - k q z_2 = -k' ac \qquad (k' = \text{const.}).$$

La substitution s doit laisser fixe $\mathfrak{A}$, qui passe par ω, b, c; il vient ainsi

$$s\mathfrak{A} = (zab)ab \times \mathrm{K}\mathfrak{A} \qquad (\mathrm{K} = \text{const.}).$$

Développons et identifions les coefficients de z_3 dans les deux membres; il viendra

$$\mathrm{K} = \mu^2$$

et, après quelques transformations faciles,

$$(2)\qquad \begin{cases} \lambda z_1(\mu b + \theta a) + a\sigma(q) - \mu^2 bq = 0, \\ \theta a + k\lambda z_2 = \mu b. \end{cases}$$

Des identités (1) et (2), on tire

$$\mu = \theta^2, \qquad k' = -1, \qquad k\lambda = 1 - \theta^2, \qquad -kq = 2z_1 + z_2,$$

après qu'on a achevé de fixer les coordonnées des directions issues de ω en prenant

$$b = z_1 - z_2;$$

d'où

$$a = \theta z_1 - \theta^2 z_2, \qquad c = \theta^2 z_1 - \theta z_2.$$

Prenant maintenant pour variable kz_3 au lieu de z_3, ce qui est licite, il viendra

$$\mathfrak{A} = (2z_1 + z_2)z_3 - 2z_1(z_1 - z_2)z_3 - z_1 z_2(z_1 - z_2) = 0$$

et

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1[(1-\theta^2)z_3 + \theta^2(z_1 - z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2[(1-\theta^2)z_3 + \theta^2(z_1 - z_2)] \\ z_3 & z_3(\theta z_1 - \theta^2 z_2) \end{vmatrix}.$$

On a construit ainsi le groupe XVIII de l'Introduction.

34. Combinons maintenant avec A une substitution cubique S qui est, comme plus haut (**31**), de la forme

$$\mathrm{S}\begin{cases} a\ b & a'\ b' \\ b\ c & b'\ c' \end{cases} \qquad \sigma = (abc)(a'b'c'),$$

A étant (**1**, lemme I),

$$\mathrm{A}\begin{cases} d\ a\ b\ c \\ d\ a\ b\ c \end{cases} \qquad \sigma = (d)(abc)(a'b'c').$$

Remarquons que l'on a $\mathrm{S}(zbb') = aa'(zbb')$; prenons la droite

$\overline{bb'}$ pour $z_3 = 0$; soit u le troisième point où $\overline{bb'}$ rencontre $\mathfrak{A}$, S laisse $\overline{bb'}$ fixe et, par suite, aussi u; la direction $\overline{\omega u}$ ne peut être que $z_1 = 0 (u = d)$ ou $z_2 = 0$.

Prenons d'abord $u = d$; il viendra

$$\mathfrak{A} = q z_3^2 + 2 b z_1 z_3 + z_1 bb' = 0,$$

$$(1) \qquad b z_1 - b' q = - k' ac \qquad (k' = \text{const.}),$$

$q =$ forme linéaire en z_1, z_2, et (**51**)

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 (p z_3 + bb') \\ z_2 & \theta^2 z_2 (p z_3 + bb') \\ z_3 & k a a' z_3 \end{vmatrix} \qquad (k^3 = 1);$$

$p =$ forme linéaire en z_1, z_2 : la forme donnée pour S comprend, en effet, les deux espèces (**51**). On doit avoir, puisque S laisse la courbe $\mathfrak{A}$ immobile,

$$S\mathfrak{A} = (p z_3 + bb') a a' bb' \times K\mathfrak{A} \qquad (K = \text{const.}).$$

Identifions les coefficients des puissances de z_3 dans les deux membres, il vient, après quelques transformations faciles, en tenant compte de (1),

$$(2) \qquad \begin{cases} k^2 a a' \sigma(q) - \theta bb' q + \theta p z_1 (2k' + p) a = 0, \\ k a + p = b, \qquad K = \theta. \end{cases}$$

On tire des identités (2)

$$k = \theta^2, \qquad p = b - \theta^2 a,$$

si l'on prend

$$b = z_1 - z_2,$$

d'où

$$a = \theta z_1 - \theta^2 z_2, \qquad c = \theta^2 z_1 - \theta z_2, \qquad p = (\theta - 1) z_2.$$

Quant aux formes linéaires b' et q, les seules conditions auxquelles

elles soient assujetties sont l'identité (1), qui devient

$$(1') \qquad b'q = z_1(z_1 - z_2) + k'(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2).$$

En résumé, S est de la deuxième espèce (**31**) et l'on a

$$\mathfrak{A} = qz_3^2 + 2z_1(z_1 - z_2)z_3 + z_1 z_2 b' = 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1[z_2 z_3(\theta - 1) + b'(z_1 - z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2[z_2 z_3(\theta - 1) + b'(z_1 - z_2)] \\ z_3 & \theta^2 a' z_3(\theta z_1 - \theta^2 z_2) \end{vmatrix}.$$

Nous avons ainsi construit le groupe XIX de l'Introduction, après suppression des accents devenus inutiles.

Supposons maintenant que la droite $\overline{bb'}$ ou $z_3 = 0$ coupe $\mathfrak{A}$ en un troisième point u, tel que $\overline{\omega u}$ soit $z_2 = 0$. Il viendra

$$\mathfrak{A} = qz_3^2 + 2brz_3 + z_2 bb' = 0 \ (^1);$$

$$(1') \qquad br^2 - z_2 qb' = -k' z_1 ac,$$

puisque $abcd$ est le descriminant de $\mathfrak{A}$; q, r = formes linéaires en z_1, z_2. On a encore

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(pz_3 + bb') \\ z_2 & \theta^2 z_2(pz_3 + bb') \\ z_3 & kaa' z_3 \end{vmatrix} \qquad (k^3 = 1).$$

On a encore aussi

$$S\mathfrak{A} = (pz_3 + bb')aa'bb' \times K\mathfrak{A} \qquad (K = \text{const.});$$

l'identification des deux membres conduit, après quelques transformations faciles, au système

$$(2') \qquad \left\{ \begin{aligned} aa'\sigma(q) - bb'\theta^2 q + p[a\sigma(r) + \theta^2 br] &= 0, \\ a\sigma(r) + \theta^2 p z_2 &= \theta^2 br, \\ K &= \theta^2. \end{aligned} \right.$$

---

(1) On peut d'ailleurs choisir les coordonnées de façon à avoir $b = z_1 - z_2$.

La première des identités (2′) est une conséquence de la deuxième et de (1″), après qu'on a fait $k = 1$, comme l'exige cette deuxième identité (2′). Les seules relations distinctes que l'on trouve sont donc

$$(3') \qquad \begin{cases} pz_2 = br - a\sigma(r) \\ qb'z_2 = br^2 + k'z_1 ac \end{cases} \qquad (b = z_1 - z_2).$$

On a construit ainsi le groupe XX de l'Introduction.

53. *Le groupe* Γ *est du type VI* (**6**). — Dans ce cas la substitution S, qui a σ pour directrice, laisse fixes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (**18**); S laisse fixe la conique

$$\mathfrak{A} = z_3^2 - z_1 z_2,$$

et, en raisonnant comme plus haut (**52**), on démontre que S est une substitution quadratique

$$s \left\{ \begin{matrix} a & d \\ d & e \end{matrix} \right. = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1[z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2[z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_3 & \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)z_3 + z_1 z_2 \end{vmatrix},$$

où

$$\mu = (\theta - \theta^2)^{-1}, \qquad d = z_1 - z_2,$$
$$a = \theta z_1 - \theta^2 z_2, \qquad e = \theta^2 z_1 - \theta z_2.$$

Cela posé, on voit sur S que les coordonnées

du point a sont $\theta^2 \quad \theta \quad -1$,
du point d sont $1 \quad 1 \quad 1$,
du point e sont $\theta \quad \theta^2 \quad -1$;

et pour construire $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nous déterminerons les deux formes linéaires p et P (**11**).

Considérons les coniques

$$\mathfrak{B}' = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z_3} = pz_3 + \mathrm{P}z_1, \qquad \mathfrak{C}' = \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z_3} = \mathrm{P}z_3 + pz_2.$$

$\mathfrak{B}'$ est la conique des cinq points ω, a, d, e, c;

$\mathfrak{C}'$ est la conique des cinq points ω, a, d, e, b,

et par suite (λ, $\lambda' =$ const.)

$$\mathfrak{B}' = \lambda\mathfrak{A} + (zae)(zdc), \qquad \mathfrak{C}' = \lambda'\mathfrak{A} + (zae)(zdb).$$

Comme $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{C}'$ passent par ω, il vient

$$\lambda + (ae)_3(dc)_3 = \lambda' + (ae)_3(db)_3 = 0.$$

On tire de ces relations

$$\begin{aligned} p &= 2z_1 + z_2, \\ -P &= z_1 + 2z_2, \end{aligned} \qquad p^2 z_2 - P^2 z_1 = z_2^3 - z_1^3.$$

On a construit ainsi le groupe XXI de l'Introduction.

Nous avons écarté d'ailleurs la supposition

$$s \begin{cases} b & c \\ b & c \end{cases},$$

car $s\mathrm{A}$ aurait été linéaire et le groupe G un groupe normo-linéaire déjà construit (**28**).

36. Γ *est du type VII* (**6**). — On aura évidemment, puisque $\sigma^3 = 1$,

$$\sigma = (abc)(a'b'c'),$$

et l'on voit qu'au point de vue de σ et des discriminants de A, B, C les six fondamentaux se partagent en deux cycles

$$abc \quad \text{et} \quad a'b'c',$$

ou en trois couples

$$aa', \quad bb', \quad cc'.$$

Je dis que pour construire G il suffira dans tous les cas de combiner à Γ une substitution quadratique s. Prenons en effet dans G une substitution cubique S; nous pouvons emprunter les quatre fondamentaux

de S, soit à deux, soit aux trois couples, et le discriminant sera, par exemple,

$$aa'bb' \quad \text{ou} \quad aa'bc$$

Dans le premier cas, SG est linéaire et G normo-linéaire; dans le second cas, SB est quadratique, ce qu'il fallait démontrer.

Considérons maintenant la substitution s; nous pouvons emprunter les deux fondamentaux de la quadratique s, par exemple, à un même couple, et le discriminant sera aa'; à un même cycle, et le discriminant sera bc; à des couples et cycles différents, et le discriminant sera bc'.

Si l'on avait

$$s \begin{cases} a & a' \\ b & b' \end{cases}, \qquad s^2 \begin{cases} a & a' & c & c' \\ c & c' & b & b' \end{cases},$$

s^2 B serait linéaire et G normo-linéaire, groupe déjà construit.

Si l'on avait

$$s \begin{cases} b & c' \\ c & a' \end{cases}, \qquad s^2 \begin{cases} b & a & c' & b' \\ a & c & b' & a' \end{cases}.$$

s^3 serait biquadratique, ce qui est impossible.

Nous ne pouvons supposer par suite que

$$s \begin{cases} b & c \\ c & a \end{cases}.$$

Prenons $\overline{cc'}$ pour $z_3 = 0$; il viendra

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(zbc) \\ z_2 & \theta^2 z_2(zbc) \\ z_3 & b(zb'c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(\lambda z_3 + \mu c) \\ z_2 & \theta^2 z_2(\lambda z_3 + \mu c) \\ z_3 & b(\lambda' z_3 + \mu' c) \end{vmatrix}.$$

Écrivons que $s^3 = 1$, on aura entre les constantes λ et μ

$$(1) \qquad \lambda'^2 + \lambda\mu' + \lambda'\mu + \mu^2 = 0.$$

D'ailleurs s permute entre elles les trois courbes invariantes et il vient

$$(2) \qquad s\mathfrak{A} = \mathfrak{C}, \qquad s\mathfrak{B} = \mathfrak{A}, \qquad s\mathfrak{C} = \mathfrak{B},$$

à des facteurs fondamentaux près. Les conditions (2) nous donnent un certain nombre d'équations entre les trois [à cause de (1)] constantes indépendantes λ et μ et les dix coefficients des cinq formes linéaires en z_1, z_2, p, p, P, Q, c'; je ne compte pas c, puisqu'on peut, par un choix convenable de coordonnées, prendre $c = z_1 - z_2$ par exemple. On obtiendrait la valeur des divers coefficients par des calculs passablement pénibles, que nous omettrons afin de ne pas pousser plus loin la construction du groupe XXII de l'Introduction.

Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle;

Par M. K. WEIERSTRASS.

Traduit par M. Léonce Laugel.

Soit $f(x)$ une fonction uniforme réelle et continue pour toute valeur réelle de la variable x et dont la valeur absolue ait une limite supérieure finie; on sait qu'elle satisfait à l'équation suivante, dans laquelle u désigne une deuxième variable réelle et k une grandeur positive indépendante de x et de u,

$$(1) \qquad \lim_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

Le théorème qu'exprime cette équation est susceptible d'être aisément généralisé.

Soit une fonction quelconque $\psi(x)$ de même nature que $f(x)$, qui, ne changeant pas de signe, satisfasse à l'équation $\psi(-x) = \psi(x)$ et, en outre, à la condition suivante :

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx$$

conserve une valeur finie, qui sera désignée par ω. Si l'on pose

$$(2) \qquad F(x, k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

on aura

$$(3) \qquad \lim_{k=0} F(x, k) = f(x).$$

Pour la démonstration des équations (1), (3), il y a lieu de faire la remarque suivante. Soient a_1, a_2, b_1, b_2 des grandeurs positives, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$; on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\int_{-b_1}^{b_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du - \frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&= \frac{1}{k}\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{k}\int_{a_1}^{b_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&= \quad f(-b_1 - \ldots - a_1)\int_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}} \psi(u)\,du \\
&\quad + f(+a_2 + \ldots + b_2)\int_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}} \psi(u)\,du \quad (^1).
\end{aligned}$$

Considérée conjointement avec les suppositions que nous avons faites sur les fonctions $f(x)$ et $\psi(x)$, cette équation nous apprend que l'intégrale

$$\frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

si l'on y donne aux grandeurs x, k des valeurs déterminées et qu'ensuite a_1 et a_2 deviennent, indépendamment l'un de l'autre, infiniment grands, tend vers une limite finie et déterminée, et que, par conséquent, l'intégrale

$$\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

est une grandeur parfaitement définie.

Cela posé, soit δ une grandeur positive qui peut être prise aussi

---

(1) Je désigne par $f(x_1, \ldots, x_r)$ une valeur moyenne entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend $f(x)$ dans l'intervalle de $x = x_1$ à $x = x_2$.

petite que l'on veut; on a

$$\begin{aligned}
F(x,k) = {} & \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{x-\delta} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x+\delta}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
& + \frac{1}{2k\omega}\int_{x-\delta}^{x} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x}^{x+\delta} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
= {} & \frac{1}{2\omega} f(-\infty - \ldots - x - \delta)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
& + \frac{1}{2\omega} f(x+\delta+\ldots+\infty)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
& + \frac{1}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}}[f(x-ku)+f(x+ku)]\psi(u)\,du;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
& F(x,k) - f(x) \\
& = \frac{f(-\infty+\ldots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty}\psi(u)\,du \\
& \quad + \frac{1}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}}[f(x-ku)+f(x+ku)-2f(x)]\psi(u)\,du \\
& = \frac{f(-\infty+\ldots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
& \quad + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1[f(x-\varepsilon\delta)+f(x+\varepsilon\delta)-2f(x)],
\end{aligned}$$

ε, ε_1 désignant des grandeurs positives comprises entre 0 et 1.

Soient maintenant x_1, x_2 deux valeurs quelconques déterminées de x, G la limite supérieure de la valeur absolue de $f(x)$ et g_1, g_2 deux grandeurs positives qui peuvent être prises aussi petites qu'on voudra. Nous pouvons d'abord donner à la grandeur δ une valeur assez petite pour que la grandeur absolue de

$$\tfrac{1}{2}[f(x-u)+f(x+u)-2f(x)]$$

soit toujours plus petite que g_1, lorsque x est compris dans l'inter-

valle $(x_1, \ldots, x_2)$ et pendant que u l'est en même temps dans l'intervalle $(0, \ldots, \delta)$.

A-t-on attribué une telle valeur à δ, on peut ensuite déterminer une grandeur positive k', telle que, pour chaque valeur de k qui soit plus petite que k', on ait l'inégalité

$$\frac{2G}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du < g_2;$$

alors, en vertu de l'équation précédente, la différence entre $F(x, k)$ et $f(x)$ est, en valeur absolue, plus petite que $g_1 + g_2$, et ceci est vrai pour chacune des valeurs considérées de x.

Ceci démontre non seulement que, pour chaque valeur considérée isolément de x, $F(x, k)$ se rapproche de la limite $f(x)$ lorsque k devient infiniment petit, mais encore que $F(x, k)$ converge *uniformément* vers cette limite pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle fini.

De l'équation (3) je tire une conséquence bien digne de remarque.

Parmi les fonctions $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions ci-dessus, il y en a une infinité qui sont des fonctions transcendantes entières et ont également cette propriété que les fonctions $F(x, k)$ correspondantes sont développables pour toute valeur déterminée de la grandeur k suivant les puissances de x en séries constamment convergentes.

Prend-on pour $\psi(x)$ une fonction de cette nature, par exemple $\psi(x) = e^{-x^2}$, on a le théorème suivant, qui me paraît remarquable et fécond :

A. *Soit $f(x)$ une fonction définie seulement pour les valeurs réelles de la variable x, uniforme et partout continue : on peut former d'une foule de manières une fonction transcendante entière $F(x, k)$, qui, outre x, contient un paramètre variable (positif) k, et telle que, pour toute valeur réelle de x, on ait l'équation*

$$\lim_{k=0} F(x, k) = f(x).$$

Avec la condition que la variable x reste comprise dans un inter-

valle fini, on peut, en outre, comme il a été vu, en prenant une grandeur g' aussi petite qu'on veut, donner au paramètre k une valeur k' assez petite pour que la différence entre $F(x, k')$ et $f(x)$ soit, en valeur absolue, plus petite que g' pour chaque valeur de x. Si l'on met alors $F(x, k')$ sous la forme d'une série de puissances

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

et si l'on désigne la somme des n premiers termes de cette série par $G(x)$, on peut, en prenant une autre grandeur positive g'', donner à n une valeur assez grande pour que la valeur absolue de

$$F(x, k') - G(x)$$

soit plus petite que g'' pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle considéré; et, par conséquent, la valeur absolue de $f(x) - G(x)$ sera plus petite que $g' + g''$.

On a, de la sorte, démontré le théorème suivant :

B. *Si $f(x)$ est une fonction de la nature considérée ci-dessus et si la variable x reste comprise dans un intervalle fini quelconque, on peut, en prenant une grandeur positive g, qui peut devenir aussi petite qu'on voudra, déterminer d'une foule de manières une fonction* ENTIÈRE RATIONNELLE, *qui, dans l'intervalle considéré, se rapproche de la fonction $f(x)$ assez près pour que la différence $f(x) - G(x)$ soit toujours plus petite que g en valeur absolue.*

Prenons maintenant deux suites infinies de grandeurs positives

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots,$$
$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \ldots,$$

telles que $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$ et que $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ ait une valeur finie; on peut alors, conformément à ce qui précède, déterminer une suite de fonctions

entières rationnelles

$$G_1(x), \quad G_2(x), \quad G_3(x), \quad \ldots,$$

telles que (pour $\nu = 1, 2, \ldots, \infty$)

$$| f(x) - G_\nu(x) | < g_\nu$$

lorsque x reste compris dans l'intervalle $(-a_\nu \ldots a_\nu)$.

Posons

$$f_0(x) = G_1(x),$$
$$f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x),$$

on a

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) = G_{n+1}(x),$$

et, pour chaque valeur déterminée de x,

$$\lim_{n=\infty} G_{n+1}(x) = f(x);$$

ce qui donne

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x).$$

Soient maintenant x_1, x_2 deux valeurs quelconques de x déterminées finies; et des inégalités

$$\left| \begin{array}{ll} f(x) - G_\nu(x) \;\; | < g_\nu & (-a_\nu \leqq x \leqq a_\nu), \\ f(x) - G_{\nu+1}(x) \; | < g_{\nu+1} & (-a_{\nu+1} \leqq x \leqq a_{\nu+1}), \end{array} \right.$$

on tire, pour chaque valeur de x comprise dans l'intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$

$$| f_\nu(x) | < g_\nu + g_{\nu+1}$$

tant que ν est plus grand qu'un nombre déterminé ν' qui est défini par

la condition suivante : tout intervalle $(-a_\nu, \ldots, a_\nu)$ pour lequel $\nu > \nu'$ doit contenir les deux valeurs x_1, x_2.

On a donc

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} |f_\nu(x)| < \sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} (g_\nu + g_{\nu+1}),$$

lorsque l'on a

$$x_1 \leqq x \leqq x_2.$$

Il s'ensuit que la série

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} f_\nu(x)$$

et, par conséquent, la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

convergent absolument dans tous les cas, et uniformément pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$. Or le choix des grandeurs x_1, x_2, n'est soumis à aucune restriction autre que d'avoir des valeurs réelles et les fonctions $f_\nu(x)$ en sont indépendantes.

La série précédente converge donc absolument pour toute valeur de x et uniformément dans tout intervalle

$$x_1 \leqq x \leqq x_2,$$

dont les limites ont des valeurs finies.

D'où le théorème suivant (C) :

Toute fonction $f(x)$ de la nature considérée peut être représentée d'une foule de manières par une série infinie dont les termes sont des fonctions entières rationnelles *de x. Cette série converge* absolument *pour toute valeur finie de x et* uniformément *dans chaque intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$ dont les limites sont des grandeurs finies.*

A propos du théorème (B), il est à remarquer que pour l'établir il

est seulement nécessaire de choisir pour $\psi(x)$ une fonction transcendante entière, jouissant des propriétés que l'on a vues plus haut; mais il ne l'est nullement que $F(x, k)$ soit fonction entière de x, et cela n'est pas une conséquence nécessaire de la première hypothèse.

En effet, posons, a, b étant deux grandeurs réelles quelconques,

$$F_1(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_a^b f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

l'on aura pour les valeurs réelles de x

$$F(x, k) = F_1(x, k) + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{x-a}{k}}^{+\infty} f(x-ku)\psi(u)du$$
$$+ \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{b-x}{k}}^{\infty} f(x+ku)\psi(u)du.$$

Donc si a, b, x_1, x_2 satisfont à la condition

$$a < x_1 < x_2 < b,$$

et si g_1 désigne une grandeur positive prise aussi petite que l'on veut, on pourra fixer la valeur de k, de telle sorte que la valeur absolue de la différence $f(x) - F_1(x, k)$ soit plus petite que g_1 pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$.

Cela posé, comme $F_1(x, k)$ est toujours une fonction entière (transcendante) de x, nous pouvons ensuite, en prenant une nouvelle grandeur positive g_2, déterminer une fonction *entière rationnelle* $G(x)$, telle que dans l'intervalle $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ on ait

$$|\, G(x) - F_1(x, k) \,| < g_2,$$

d'où

$$|\, f(x) - G(x) \,| < g_1 + g_2;$$

c'est ce qu'exprime le théorème (B).

Cette démonstration du théorème en question est, je crois, complè-

tement rigoureuse, et peut suffire s'il s'agit seulement de montrer qu'il existe des fonctions *rationnelles entières* $G(x)$, qui, dans tous les points d'un intervalle donné, se rapprochent d'aussi près que l'on voudra d'une fonction donnée $f(x)$ et qu'elles peuvent être effectivement déterminées.

Mais la construction de pareilles fonctions, telle que nous l'avons indiquée précédemment, présente une lacune essentielle.

Posons en effet

$$F_1(x, k_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_\nu) x^\nu,$$

où le symbole (k_ν) indique une fonction de k donnée par l'expression

$$(k_\nu) = \frac{(-1)^\nu}{2\nu!\,\omega k^\nu} \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(ku) \frac{d^\nu \psi(u)}{du^\nu}\, du,$$

et soit

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (k)_\nu x^\nu;$$

il existera à la vérité, quand δ est une grandeur positive donnée quelconque, des valeurs de k et de n pour lesquelles, dans l'intervalle $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$, on ait

$$| f(x) - G^{(n)}(x, k) | < \delta.$$

Mais, si δ devient infiniment petit, k le devient également, et malheureusement alors la considération de l'expression ci-dessus de $(k)_\nu$ ne nous apprend pas si, lorsque k devient infiniment petit, ladite expression tend vers une limite finie, ou du moins reste finie, condition absolument nécessaire pour que l'on puisse de la manière indiquée obtenir une représentation approchée utilisable de la fonction $f(x)$, pour une valeur aussi petite que l'on voudra de δ.

Je me propose de faire voir comment on peut lever cette difficulté dans une prochaine Communication.

Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle;

Par M. K. WEIERSTRASS.

Traduit par M. Léonce Laugel.

Désignons par $f(x)$, comme dans la Communication lue à l'Académie le 9 juillet de cette année, une fonction définie pour toutes les valeurs réelles de la variable x, uniforme, réelle et continue et dont la valeur absolue ait une limite supérieure finie G. Soit ensuite $\psi(x)$ une fonction transcendante entière à l'égard de laquelle nous nous contenterons d'abord de supposer qu'elle soit réelle pour toute valeur réelle de x, et qu'elle satisfasse à la condition

$$\psi(-x) = \psi(x).$$

Soient encore u et v des variables réelles indépendantes l'une de l'autre, et posons

$$\sqrt{\psi(u+vi)\,\psi(u-vi)} = \psi(u, v),$$

où l'on choisira pour la détermination du radical carré sa valeur positive; alors la valeur absolue de $\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u, v)}$ est égale à 1, et l'on a, par

conséquent, a et b étant des grandeurs réelles,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \int_a^b f(u)\,\psi(u+vi)\,du &= \int_a^b f(u)\,\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}\,\psi(u,v)\,du \\ &= \varepsilon G\int_a^b \psi(u,v)\,du, \end{aligned}\right.$$

ε désignant une grandeur complexe dont la valeur absolue est inférieure à 1.

Supposant alors que $\psi(x)$ soit une fonction de telle nature que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \psi(u,v)\,du$$

conserve une valeur finie pour toute valeur finie de v, on voit que

$$a_1,\quad a_2,\quad b_1,\quad b_2,\qquad (b_1 > a_1,\ b_2 > a_2)$$

étant des grandeurs positives, les intégrales

$$\int_{a_2}^{b_2} \psi(u,v)\,du,\quad \int_{-b_1}^{-a_1} \psi(u,v)\,du,$$

dont la seconde [puisque $\psi(-u,v) = \psi(u,v)$] est égale à

$$\int_{a_1}^{b_1} \psi(u,v)\,du,$$

deviennent infiniment petites lorsque a_1, b_1 deviennent infiniment grands. Ceci est encore vrai, en vertu de la précédente équation, des intégrales

$$\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi(u+vi)\,du,\quad \int_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi(u+vi)\,du,$$

et par conséquent l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du$$

a une valeur finie et déterminée pour chaque valeur de v.

Je vais maintenant supposer en outre que l'intégrale

$$\int_{a_2}^{\infty} \psi(u, v)\, du,$$

lorsque a_2 devient infiniment grand, converge uniformément vers la limite o, pour toutes les valeurs de v dont la valeur absolue ne surpasse pas une limite fixée quelconque; alors, en vertu de l'équation (1), il en est de même de l'intégrale

$$\int_{a_2}^{+\infty} f(u)\, \psi(u + vi)\, du$$

et, lorsque a_1 devient infiniment grand, de

$$\int_{-\infty}^{-a_1} f(u)\, \psi(u + vi)\, du.$$

On peut donc, si V, g sont des grandeurs positives données, dont la première peut devenir aussi grande, la seconde aussi petite que l'on veut, déterminer deux grandeurs positives a_1 et a_2, telles que la valeur absolue de la différence

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi(u + vi)\, du - \int_{-a_1}^{a_2} f(u)\, \psi(u + vi)\, du$$

soit, pour toutes les valeurs de v, définie par la condition

$$-\mathrm{V} \leqq v \leqq \mathrm{V}$$

plus petite que g.

Soit maintenant $x = \xi + \xi' i$ une variable complexe et désignons, comme dans la première Communication, par k une constante positive, et par ω l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(u)\, du$; alors, en vertu de ce qui précède, l'intégrale

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi + ku)\, \psi\left(u - \frac{\xi' i}{k}\right) du = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u - x}{k}\right) du$$

est une grandeur finie uniforme pour toute valeur finie de x, que dans le Mémoire précité nous avons désignée par $F(x, k)$.

Il s'agit maintenant de faire voir que $F(x, k)$ est une fonction entière (transcendante) de la variable x.

Si l'on assigne à la valeur absolue de x une limite supérieure r, on peut, en prenant deux grandeurs positives g', g'' aussi petites que l'on voudra, en déterminer deux autres (a_1, a_2) telles que la somme

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-a_1} f(\xi + ku)\,\psi\left(u - \frac{\xi' i}{k}\right) du + \frac{1}{2\omega}\int_{a_2}^{\infty} f(\xi + ku)\,\psi\left(u - \frac{\xi' i}{k}\right) du$$

soit plus petite que g' pour toutes les valeurs de ξ et ξ', satisfaisant à la condition

$$\xi^2 + \xi'^2 \leqq r^2.$$

Alors on a

$$F(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u - x}{k}\right) du + \varepsilon' g',$$

ε' désignant une grandeur dont la valeur absolue est plus petite que 1.

L'intégrale du second membre peut être développée en une série $\mathfrak{P}(x)$ constamment convergente, et en désignant par $G^{(n)}(x)$ la somme des n premiers termes de $\frac{1}{2k\omega}\mathfrak{P}(x)$, on peut prendre n suffisamment grand pour avoir

$$|F(x, k) - G^{(n)}(x)| < g' + g''$$

pour toutes les valeurs de x satisfaisant à la condition

$$|x| \leqq r.$$

Cela posé, on peut ensuite, à l'aide des considérations employées précédemment pour établir le théorème (C), faire voir que $F(x, k)$ est représentable sous la forme d'une série infinie dont les termes sont des fonctions rationnelles de x, et que cette série converge uniformément pour toutes les valeurs de x situées dans une région finie quelconque.

A cet effet, on prendra deux suites de grandeurs positives

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \ldots,$$
$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \ldots$$

telles que $\lim\limits_{n=\infty} r_n = \infty$, et que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ ait une valeur finie; puis on déterminera une suite de fonctions entières rationnelles $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., de manière que, pour toutes les valeurs de x satisfaisant à la condition $|x| \leqq r$, on ait

$$(2) \qquad |F(x, k) + G_\nu(x)| < g_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

et l'on posera

$$(4) \qquad f_0(x) = G_1(x), \qquad f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x);$$

alors

$$(5) \qquad F(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} f_\nu(x).$$

Mais, en vertu d'un théorème dont j'ai donné autrefois (*Monatsberichte der Akademie aus dem Jahre*, 1880, p. 723) la démonstration d'une manière élémentaire, on peut, en s'appuyant sur ce que la série du second membre de l'équation (5) converge uniformément dans toute région finie, la transformer en une série de puissances $\mathfrak{P}(x)$ convergente pour toute valeur finie de x.

Si l'on prend

$$\psi(x) = e^{-x^2},$$

on aura

$$\psi(u, v) = e^{-u^2+v^2},$$

et cette fonction jouit de la propriété énoncée plus haut. Il en est encore de même si l'on pose

$$\psi(x) = e^{-(c_1x^2+c_2x^4+\ldots+c_\rho x^{2\rho})},$$

la constante c_ρ ayant une valeur positive, tandis que les $c_1, c_2, \ldots, c_{\rho-1}$ peuvent avoir des valeurs réelles quelconques.

Il existe donc effectivement, comme nous l'avons énoncé en établissant le théorème (A) de notre première Communication, une infinité de fonctions $\psi(x)$ de telle nature que les fonctions $F(x, k)$ qui s'y rattachent soient des fonctions transcendantes entières.

Soit maintenant $F(x, k)$ une fonction quelconque déterminée de cette nature; la série $\mathfrak{P}(x)$, qui peut la représenter, est transformable en une série procédant suivant des fonctions *sphériques* convergente pour toute valeur finie de x. En effet, en vertu du théorème connu de M. C. Neumann sur le développement d'une fonction analytique uniforme d'une variable complexe x, procédant suivant des fonctions sphériques de première espèce, on voit de suite que toute fonction (transcendante ou rationnelle) entière $G(x)$ est représentable par une série convergente pour toute valeur finie de la variable x et de la forme

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu P^{(\nu)}(x) \quad (^1).$$

---

(1) On peut le démontrer, du reste, comme il suit. D'après la définition des fonctions sphériques, on a

$$|P^{(n)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2 - 1}|^n,$$

lorsqu'on détermine $\sqrt{x^2-1}$, en sorte que l'on ait

$$|x + \sqrt{x^2 - 1}| \geqq 1.$$

On a, de plus,

$$x^n = c_{n,0} P^{(n)}(x) + c_{n,1} P^{(n-2)}(x) + \ldots,$$

et, par suite, lorsque $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ est une série constamment convergente, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_n \sum_\nu A_n c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x),$$

mais les $c_{n,\nu}$ sont des grandeurs positives, et $\sum_\nu c_{n,\nu} = 1$, d'où

$$\sum_\nu |c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2 - 1}|^n;$$

Les coefficients de cette série sont tels que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |C_\nu| r^\nu$$

ait une valeur finie pour chaque valeur positive de r.

En outre, la série est uniformément convergente pour toutes les valeurs de x situées dans une région finie [*voir* le Mémoire de M. Thomé : *Sur les séries procédant suivant des fonctions sphériques* (*Journal de Borchardt*, t. 66, p. 337)].

Cette dernière propriété de la série donne

$$\int_{-1}^{+1} G(x') P^{(n)}(x') dx' = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \int_{-1}^{+1} P^{(n)}(x') P^\nu(x') dx',$$

x' désignant une variable réelle; d'où l'on tire

$$C_\mu = \frac{2\mu+1}{2} \int_{-1}^{+1} G(x') P^{(n)}(x') dx' \quad (\mu = 0, 1, \ldots, \infty).$$

Pour la fonction $F(x, k)$, on a, par conséquent,

$$\begin{aligned} C_\nu &= \frac{2\nu+1}{2} \frac{1}{2k\omega} \int_{-1}^{+1} P^{(\nu)}(x') dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du \\ &= \frac{2\nu+1}{4\omega} \int_{-1}^{+1} P^{(\nu)}(x') dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku) \psi(u) du; \end{aligned}$$

---

d'où il suit que $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu} | A_n c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x) |$ est une grandeur finie, et qu'en posant (pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$)

$$C_\mu = \sum_{n,\nu} c_{n,\nu} A_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\mu+2\nu,\nu} A_{\mu+2\nu} \qquad (n - 2\nu = \mu),$$

on obtient l'équation

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu P^{(\mu)}(x).$$

d'où, en posant

$$\frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x'+u)\,P^{(\nu)}(x')\,dx' = f_\nu(u),$$

il vient

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du.$$

La fonction $f_\nu(u)$ est, ainsi que $f(u)$, une fonction partout continue dont la valeur absolue peut, au plus, devenir égale à $(2\nu+1)G$, car la valeur absolue de la fonction sphérique $P^\nu(x')$ ne peut surpasser 1 pour les valeurs de x' comprises dans l'intervalle $(-1+\ldots+1)$; mais, lorsque a est une grandeur quelconque positive, on a

$$\begin{aligned} C_\nu = &\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \\ &+ \frac{1}{2\omega}\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \\ &+ \frac{1}{2\omega}\int_{-8}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du; \end{aligned}$$

d'ailleurs,

$$\int_{a}^{\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \overset{=}{<} (2\nu+1)G\int_{a}^{\infty} \psi(u)\,du,$$

$$\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \overset{=}{<} (2\nu+1)G\int_{-\infty}^{-a} \psi(u)\,du.$$

Si donc k devient infiniment petit, on obtient

$$\lim_{k=0} C_\nu = f_\nu(0)\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a} \psi(u)\,du + \ldots,$$

les termes omis devenant infiniment petits lorsque a devient infiniment grand.

Comme on peut prendre a aussi grand qu'on veut, il vient

$$\lim_{k=0} C_\nu = f_\nu(0) = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,P^{(\nu)}(x)\,dx.$$

Posant

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(uk)\psi(u)\,du = \Phi_\nu(k)$$

et désignant par δ une petite grandeur réelle, on a

$$\Phi_\nu(k+\delta) - \Phi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a} [f_\nu(ku+\delta u) - f_\nu(ku)]\psi(u)\,du + \ldots,$$

les termes omis dans le second membre devenant aussi petits qu'on voudra lorsqu'on fait a suffisamment grand. Soit donc δ_1 une grandeur donnée aussi petite qu'on veut; on peut donner à a une valeur déterminée, telle que la valeur absolue de

$$\Phi_\nu(k+\delta) - \Phi_\nu(k) - \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a} [f_\nu(ku+\delta u) - f_\nu(ku)]\psi(u)\,du$$

soit plus petite que δ_1, et cela pour toute valeur de k, δ.

On peut ensuite, en prenant une seconde grandeur δ_2 qui peut devenir aussi petite que l'on voudra, assigner à δ, en valeur absolue, une limite supérieure δ', en sorte que

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a} [f_\nu(ku+\delta u) - f_\nu(ku)]\psi(u)\,du,$$

soit en valeur absolue plus petit que δ_2 et par conséquent que

$$|\,\Phi_\nu(k+\delta) - \Phi_\nu(k)\,| < \delta_1 + \delta_2,$$

lorsque l'on a

$$|\,\delta\,| < \delta';$$

par conséquent $\Phi_\nu(k)$ est une fonction continue de k.

On a ainsi démontré ce théorème :

Soit $\psi(x)$ une fonction de la nature considérée et soit

$$F(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

on aura, pour toute valeur finie de la variable complexe x,

$$(6) \qquad F(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_\nu(k) P^{(\nu)}(x),$$

lorsqu'on aura posé

$$(7) \qquad \begin{cases} f_\nu(u) = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x'+u) P^\nu(x') dx', \\ \Phi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku) \psi(u) du, \end{cases}$$

et les $\Phi_\nu(k)$ sont des fonctions continues de k.

Revenons au cas où x désigne une variable réelle et où l'on a

$$f(x) = \lim_{k=0} F(x, k).$$

Si la variation de x est restreinte à l'intervalle

$$-a \leqq x \leqq a,$$

a étant une grandeur positive quelconque, on peut, en prenant une grandeur positive g', aussi petite que l'on voudra, donner au paramètre k une valeur déterminée k' pour laquelle on ait

$$| f(x) - F(x, k') | < g'.$$

Désignant ensuite par R la plus grande valeur que puisse prendre en valeur absolue la grandeur

$$\sqrt{x^2 - 1} + x,$$

pour les valeurs considérées de x, on a

$$R = \begin{cases} 1 & \text{pour } a \leqq 1, \\ a + \sqrt{a^2 - 1} & \text{pour } a > 1; \end{cases}$$

on a donc, comme on l'a déjà remarqué,

$$| P^{\nu}(x) | \leqq R^{\nu}.$$

Or la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} | \Phi_{\nu}(k') | R^{\nu}$$

a une valeur finie ; il est donc toujours possible, en prenant une deuxième grandeur positive g'', de déterminer un entier positif n, tel que la valeur absolue de

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Phi_{\nu}(k') P^{\nu}(x)$$

soit plus petite que g''.

Posant alors

$$(8) \qquad G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_{\nu}(k) P^{(\nu)}(x),$$

on a

$$| f(x) - G^{(n)}(x, k') | < g' + g'',$$

ce qui permet d'exprimer le théorème (B) de ma première Communication sous la forme suivante :

Soient a, g des grandeurs positives dont la première peut devenir aussi grande, la seconde aussi petite que l'on voudra, il sera toujours possible d'assigner, dans l'expression $G^{(n)}(x, k)$ définie par la précédente équation, laquelle est une fonction rationnelle entière de degré n en x, au paramètre k et au nombre n des valeurs telles que pour toutes les valeurs de x, appartenant à l'intervalle

$$(-a + \ldots + a),$$

la différence entre

$$f(x) \quad \text{et} \quad G^{(n)}(x, k)$$

soit $< g$ en valeur absolue.

L'expression précédemment développée de la fonction $F(x, k)$ a cet avantage essentiel sur l'expression en forme de série de puis-

sances, que les coefficients de la première [les $\Phi_\nu(k)$] se présentent sous un aspect qui fait immédiatement reconnaître qu'ils sont des fonctions continues de k et que chacun d'eux a une limite que sa valeur absolue ne peut surpasser, quelle que soit la valeur de k, tandis qu'en même temps, pour toute valeur déterminée de k, on a toujours

$$\lim_{\nu=\infty} \Phi_\nu(k) = 0.$$

Nous avons donc ainsi triomphé de la difficulté qui se présente, comme on l'a vu dans ma première Communication, lorsqu'on définit la fonction $G(x)$ comme elle l'a été d'abord dans le théorème (B).

Nous avons jusqu'ici supposé, à l'égard de la fonction $f(x)$, que sa valeur absolue avait une limite supérieure finie. On peut s'affranchir de cette restriction lorsque l'on se propose seulement de déterminer une fonction entière rationnelle $G(x)$ qui, dans un intervalle donné $(x_1, \ldots, x_2)$, diffère assez peu de la fonction $f(x)$ pour que la valeur absolue de la différence

$$f(x) - G(x)$$

soit, pour chaque valeur de x considérée, inférieure à une limite quelconque assignée g.

En effet, définissons une fonction $f_1(x)$ de manière à avoir

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x_1) \quad \text{quand} \quad x < x_1, \\ f_1(x) &= f(x) \quad \text{quand} \quad x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ f_1(x) &= f(x_2) \quad \text{quand} \quad x > x_2; \end{aligned}$$

$f_1(x)$ est alors de même nature que $f(x)$ considérée précédemment et l'on peut déterminer une fonction $G(x)$ qui, pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$, satisfasse à la condition

$$| f_1(x) - G(x) | < g;$$

d'où

$$| f(x) - G(x) | < g.$$

Or la seule hypothèse faite sur la fonction $f(x)$, dans la démonstra-

tion du théorème C de notre première Communication, est qu'il est possible, en prenant deux grandeurs quelconques positives a_ν, g_ν, de former une fonction entière rationnelle $G(x)$ pour laquelle on ait

$$| f(x) - G_\nu(x) | < g$$

(quand $-a_\nu \leqq x \leqq a_\nu$).

Le théorème dont il s'agit est donc valable sans modification lorsque la fonction $f(x)$ est choisie de sorte qu'elle ait, pour toute valeur réelle finie de x, une valeur réelle finie déterminée et variant avec x d'une manière continue.

Il reste à voir maintenant les modifications qu'il y a lieu d'apporter aux théorèmes établis précédemment lorsque l'on n'impose plus à $f(x)$ la condition d'être une fonction partout continue. C'est la recherche que j'entreprendrai dans un Travail suivant.

On étendra aussi aux fonctions uniformes de plusieurs arguments réels cette étude, qui ne présente aucune difficulté lorsqu'il s'agit de fonctions partout continues.

Je vais maintenant prendre pour $f(x)$ une fonction périodique, c'est-à-dire une fonction qui ne change pas de valeur lorsqu'on augmente son argument d'une grandeur positive déterminée $2c$.

Dans ce cas, la fonction $F(x, k)$ correspondante peut être représentée sous la forme d'une série de Fourier convergente pour toute valeur complexe de x, et dont les coefficients sont des fonctions continues de la grandeur k.

L'équation (1) précédente donne

$$F(x + 2c, k) = F(x, k).$$

Si donc, en désignant par z une nouvelle variable complexe, on pose

$$\overline{F}(z) = F\left(\frac{c}{\pi i} \log z, k\right),$$

on voit que $\overline{F}(z)$ est une fonction analytique de z qui, dans tout le

champ de variation de cette grandeur, ne présente que deux points critiques o et ∞, et que, par conséquent, elle est développable en une série constamment convergente de la forme

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu z^\nu.$$

Posons

$$z = e^{\frac{\pi x}{c} i},$$

on aura

$$\overline{F}(z) = F(z, k)$$

et, par suite,

$$F(x, k) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu e^{\frac{\nu \pi x}{c} i}$$

pour toute valeur finie de z.

Or ce développement de $F(x, k)$ converge uniformément dans tout domaine fini de la variable x; par conséquent, si l'on désigne encore par x' une variable réelle et par n un entier, on aura

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x', k)\, e^{\frac{-n x' \pi i}{c}} dx' = \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int_{-c}^{c} e^{\frac{(\nu-n)\pi x'}{c} i} dx' = C_n.$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2cC_n &= \frac{1}{2k\omega}\int_{-c}^{c} e^{\frac{-n\pi x'}{c} i} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-c}^{c} e^{\frac{-n\pi x'}{c} i} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku)\,\psi(u)\, du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\, e^{\frac{-nku\pi i}{c}} du \int_{-c}^{c} f(x'+ku)\, e^{\frac{-n\pi}{c}(x'+ku) i} dx'. \end{aligned}$$

Mais on a, en posant

$$f_1(x') = f(x')\, e^{\frac{-n\pi x'}{c} i}$$

et désignant par x_0 une grandeur indépendante de x',

$$\begin{aligned}\int_{-c}^{c} f_1(x')\,dx' &= \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x')\,dx' + \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\,dx' \\ &= \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\,dx' + \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x'+2c)\,dx' \\ &= \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\,dx' + \int_{c}^{x_0+c} f_1(x')\,dx' \\ &= \int_{x_0-c}^{x_0+c} f_1(x')\,dx' + \int_{-c}^{c} f_1(x'+x_0)\,dx'.\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{-c}^{c} f(x'+ku)e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku)i}\,dx' = \int_{-c}^{c} f(x')e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\,dx',$$

et par suite, si, v désignant une grandeur réelle quelconque, on pose

$$(9)\qquad \Phi(v) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)e^{-uvi}\,du = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\infty} \psi(u)\cos(vu)\,du,$$

il vient

$$(10)\qquad C_n = \Phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\int_{-c}^{c} \frac{1}{2c} f(x')e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\,dx'.$$

Posant alors

$$(11)\qquad \begin{cases} A_n = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{-c}^{c} f(x')\cos\frac{n\pi}{c}x'\,dx', \\ A'_n = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{-c}^{c} f(x')\sin\frac{n\pi}{c}x'\,dx', \end{cases}$$

on a

$$(12)\qquad C_n = (A_n - iA'_n)\,\Phi\left(\frac{n\pi k}{c}\right),$$

d'où

$$(13)\qquad F(x,k) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\left(A_n\cos\frac{n\pi}{c}x + A'_n\sin\frac{n\pi}{c}x\right).$$

D'après la formule précédente, $\Phi(v)$ est une fonction continue de v qui, pour $v = 0$, prend pour valeur 1.

Si, dans l'expression du second membre de la dernière équation, on fait $k = 0$, elle se réduit à

$$A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{c}x + A'_n \sin\frac{n\pi}{c}x\right),$$

c'est-à-dire qu'elle prend la forme suivant laquelle est développable, d'après le théorème de Fourier, la fonction $f(x)$ en général (c'est-à-dire lorsqu'on fait abstraction de certaines fonctions spéciales qui n'ont pas encore été jusqu'ici suffisamment définies).

Mais il existe effectivement des fonctions $f(x)$ (M. du Bois-Reymond en a donné le premier un exemple) qui, pour certaines valeurs de x, lesquelles peuvent se rencontrer en nombre infini dans chaque intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$ aussi petit qu'on voudra, ne peuvent être représentées par la dernière série, et ceci nous prouve que, pour déterminer la limite vers laquelle converge la série du second membre de l'équation (13) lorsque k devient infiniment petit, on n'a pas inconditionnellement toujours le droit de poser $k = 0$ dans chaque terme de la série.

La série

$$\sum_{=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$

est convergente, comme on l'a vu, pour toute valeur de z, à l'exception des deux valeurs 0 et ∞. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

converge donc pour toute valeur finie de z.

Prenant alors, par exemple,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right),$$

on aura

$$A_n = \frac{1}{n^2} A'_n = 0$$

et, par suite,

$$C_n = \frac{1}{n^2} \Phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right);$$

il s'ensuit que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \Phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right) z^n$$

est elle-même convergente pour toute valeur finie de z.

Dès lors, si l'on pose

$$(14) \qquad \chi(x, v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Phi(nv) e^{nxi},$$

cette expression, ainsi définie pour toute valeur finie complexe de x et pour toute valeur réelle de v, est une fonction analytique uniforme et qui, puisque $\Phi(-v) = \Phi(v)$, satisfait à la formule

$$(15) \qquad \chi(x, v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Phi(nv) \cos nx = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(nv) \cos nx,$$

et l'on peut alors exprimer la fonction $F(x, k)$ sous la forme qui suit

$$(16) \qquad F(x, k) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x - x'}{c}\pi, \frac{k\pi}{c}\right) dx'.$$

Soient de nouveau g', g'' des grandeurs données positives, aussi petites qu'on voudra, et k' une valeur déterminée de k fixée, de telle sorte que

$$|f(x) - F(x, k')|$$

soit, pour chaque valeur réelle de x, plus petit que g' : si l'on détermine alors un entier positif n, tel que la valeur absolue de

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\frac{\nu\pi}{c} x + A'_\nu \sin\frac{\nu\pi}{c} x\right)$$

soit pour toute valeur réelle de x plus petite que g'', et si l'on pose

$$(17)\quad f(x) = A_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \Phi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\frac{\nu\pi}{c}x + A'_\nu \sin\frac{\nu\pi}{c}x\right) + R_n,$$

la valeur absolue de R_n reste toujours plus petite que $g' + g''$.

D'où le théorème (D) :

Soit $f(x)$ une fonction définie, pour toute valeur réelle de x, uniforme et toujours continue à période réelle; on peut, en choisissant une grandeur positive g aussi petite que l'on voudra, la représenter d'une foule de manières par une série de Fourier finie *qui approche assez près de la fonction $f(x)$ pour que la différence entre les deux fonctions ne soit jamais pour aucune valeur de x plus grande que g.*

A l'aide de ce théorème, ainsi que des considérations employées pour établir le théorème (C), lorsque, par les fonctions dont il est question, $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., on entend des séries finies de Fourier ayant même période primitive que $f(x)$, on obtient le théorème suivant (E) :

Toute fonction $f(x)$ de la nature de celles considérées dans (D), *à période primitive $2c$, peut être représentée sous la forme d'une somme dont les termes sont tous des séries* finies *de Fourier à période $2c$.*

Ces séries convergent absolument *pour toute valeur finie de x et* uniformément *dans tout intervalle fini.*

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple simple, je prends

$$\psi(x) = e^{-x^2}.$$

Alors $2\omega = \sqrt{\pi}$ et

$$\Phi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-}^{+\infty} e^{-u^2-uvi}\,du = \frac{e^{-\frac{v^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-}^{+\infty} e^{-\left(u+\frac{vi}{2}\right)^2}\,du = e^{-\frac{v^2}{4}},$$

ce qui donne

$$(18)\qquad \chi(x, v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x,$$

et, si l'on pose

$$(19)\qquad q = e^{-\frac{v^2}{4}},$$

on a

$$(20)\qquad \chi(x, v) = \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, q\right),$$

$\vartheta_3(x, q)$ désignant la fonction de Jacobi

$$1 + 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \ldots;$$

on a donc

$$(21)\qquad F(x, k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\,\vartheta_3\left(\frac{x - x'}{2c}\pi, q\right) dx',$$

où

$$q = e^{-\frac{k^2\pi^2}{4c^2}}.$$

La formule du second membre de cette équation se trouve déjà dans Fourier (*Théorie analytique de la chaleur*, Chap. X).

Pour obtenir l'état thermique à un instant quelconque d'un anneau homogène infiniment mince, de longueur $2c$, qui ne rayonne pas de chaleur, lorsque ledit état est connu à un moment quelconque, il s'agit de déterminer une fonction Φ de deux variables réelles x et t, qui satisfasse à l'équation différentielle

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

dans laquelle μ désigne une constante positive, qui, considérée comme fonction de x, possède la période $2c$ et qui, pour $t = 0$, soit égale, dans l'intervalle

$$-c \leqq x \leqq c,$$

à une fonction arbitraire donnée $F(x)$, à laquelle on impose les seules conditions qu'elle soit continue et que $F(-c) = F(c)$.

Fourier trouve, pour expression de la fonction Φ ainsi définie,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{-c}^{c} F(x')e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx' \\ &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x')\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx', \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(23)\qquad \Phi = F(x, k),$$

lorsque la fonction $f(x)$ est prise de telle sorte qu'elle coïncide avec $F(x)$ dans l'intervalle $(-c \leqq x \leqq c)$ et quand on prend

$$(24)\qquad k = 2\sqrt{\mu t}.$$

Pour démontrer que, pour $t = 0$, la fonction Φ est égale à $F(x)$ dans l'intervalle $(-c \leqq x \leqq c)$, Fourier pose, dans chaque terme de son expression, $t = 0$; ce qui lui donne la série

$$\frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{-c}^{c} F(x')\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx',$$

dont il admet qu'elle représente toujours la fonction $F(x)$ dans l'intervalle donné.

Il est digne de remarque que, malgré les objections qui peuvent être faites aux procédés de Fourier, l'expression trouvée pour Φ est valable sans aucune exception. En effet, comme on l'a fait voir, on peut la transformer en $F(x, 2\sqrt{\mu t})$, ce qui nous donne, sans qu'il soit nécessaire de recourir au théorème de Fourier,

$$\lim_{t=0}\Phi = F(x).$$

Ensuite ses termes pris isolément satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},$$

et par conséquent Φ y satisfait également, parce qu'en effet la série dont il s'agit est une fonction analytique uniforme de x et de t, lorsqu'on impose à la grandeur t la condition d'avoir sa partie réelle positive et parce qu'en outre la série converge uniformément dans chaque domaine fini des grandeurs x et t.

Enfin la série ne change pas de valeur lorsqu'on y met $x + 2c$ à la place de x, et elle satisfait donc à toutes les conditions imposées à la fonction qu'elle doit représenter.

C'est une chose bien digne de remarque que, dans un problème de Physique mathématique où nous cherchons une fonction de deux variables qui, par leur nature physique même, ne peuvent évidemment avoir que des valeurs réelles, fonction qui, pour une valeur déterminée de l'un de ses arguments, doit devenir égale à une fonction arbitraire donnée de l'autre, nous obtenions pour cette fonction une expression qui se trouve être une fonction analytique de ces variables et qui, par suite, a encore un sens pour des valeurs complexes de ces dernières.

Désignons maintenant par n un entier positif et posons

$$\chi(x, v)_n = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x;$$

on tire de l'équation (18)

$$\chi(x, v) = \chi(x, v)_n + 2 \sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x.$$

Pour les valeurs réelles de x, la valeur absolue du second terme du second membre de cette dernière équation, terme que nous appellerons R_n, n'est jamais supérieure à

$$2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2+2n\nu+\nu^2}{4} v^2},$$

d'où

$$R_n < e^{-\frac{n^2+2n}{4} v^2} \, 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}}.$$

Posons alors, dans l'équation connue,

$$1 + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} e^{-\nu^2\tau\pi} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2\pi}{\tau}}\right),$$

où τ désigne une grandeur positive, $\tau = \frac{v^2}{4\pi}$; on aura, pour v positif,

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{v} - 1 + \frac{4\sqrt{\pi}}{v}\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}};$$

donc

$$R_n < \frac{2\sqrt{\pi}}{v} e^{-\frac{(n+1)^2}{4}v^2}\left\{1 - \frac{v}{2\sqrt{\pi}} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}}\right\} e^{\frac{v^2}{4}}.$$

Posons maintenant, m désignant une grandeur positive,

$$(25) \qquad v = \frac{2\sqrt{m\log(n+1)}}{n+1},$$

on aura

$$R_n < \frac{(n+1)^{-m+1}}{2\sqrt{m\log(n+1)}}(1 + [n]),$$

le symbole $[n]$ désignant une grandeur qui, pour une valeur infiniment grande de n, devient infiniment petite.

Prenant donc

$$m \geqq 1,$$

il vient

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Mais alors

$$e^{-\frac{v^2}{4}} = e^{-\frac{m\log(n+1)}{(n+1)^2}} = (n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}};$$

si donc on désigne par le symbole $\{n\}$

$$(26) \qquad (n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}}$$

et si l'on pose

$$(27)\qquad \chi(x, n)\sum_{\nu=-1}^{n}\{n\}^{\nu^2}\cos\nu x = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\{n\}^{\nu^2}\cos\nu x,$$

il vient

$$\chi(x, v)_n = \chi(x, n).$$

De l'équation

$$F(x, k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, \frac{k\pi}{c}\right)dx'$$

on tire alors

$$\begin{aligned} F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, v\right)dx' \\ &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, u\right)dx' + R'_n, \end{aligned}$$

R'_n désignant une grandeur qui devient infiniment petite pour n infiniment grand. Comme $\lim\limits_{n=\infty} v = 0$ et $\lim\limits_{v=0} F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) = f(x)$, on a, par conséquent,

$$(28)\qquad f(x) = \lim_{n=\infty}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-c'}{c}\pi, n\right)dx'.$$

Le théorème de Fourier, exprimé avec précision, dit que l'on a

$$(29)\qquad f(x) = \lim_{n=\infty}\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(x)\bar{\chi}\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right)dx',$$

où l'on a posé

$$(30)\qquad \bar{\chi}(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n}\cos\nu x.$$

A la place de cette équation, qui n'est pas valable dans tous les cas, on devra donc prendre la précédente, où la fonction $\bar{\chi}(x, n)$ est remplacée par une autre $\chi(x, n)$ qui, comme elle, a la forme

$$1 + 2(n, 1)\cos x + 2(n, 2)\cos 2x + \ldots + 2(n, n)\cos nx.$$

où (n, ν) désigne une grandeur positive dépendant de n et ν et qui dans $\overline{\chi}(x, n)$ se réduit à l'unité. Or, pour tout nombre déterminé ν,

$$\lim_{n=\infty}(n, \nu) = 1;$$

on peut donc prendre n suffisamment grand pour que les $(\nu + 1)$ premiers termes de $\chi(x, n)$ approchent des termes correspondants de $\overline{\chi}(x, n)$ d'aussi près que l'on voudra.

Les fonctions $\chi(x, n)$ de la forme et de la nature que l'on a vues plus haut et pour lesquelles l'équation (28) a lieu sans restriction peuvent être déduites de la fonction $\chi(x, n)$ qui dérive d'une fonction quelconque $\psi(u)$.

On peut toujours déterminer une grandeur positive ε_n dépendant de n et telle que la différence

$$\chi(x, \varepsilon_n) - \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \Phi(\nu, \varepsilon_n) \cos \nu x$$

converge vers zéro lorsque n grandit sans limite, et alors

$$(31) \qquad \chi(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \Phi(\nu, \varepsilon_n) \cos \nu x = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{n} \Phi(\nu, \varepsilon_n) \cos \nu x$$

sera une fonction de la nature considérée.

Il va sans dire qu'on n'obtient pas de cette manière toutes les fonctions possibles de l'espèce dont il s'agit.

Nous ferons remarquer, en terminant, que l'équation (28) a encore lieu pour les valeurs de x comprises *entre* $-c$ et $+c$, comme on le voit aisément, lorsque l'on prend pour $f(x)$ une fonction de x qui dans l'intervalle ($x = -c$ à $x = +c$) est uniforme et continue, sans qu'il soit nécessaire d'avoir $f(c) = f(-c)$. Dans ce cas, on devra, dans le premier membre de l'équation, écrire

$$\tfrac{1}{2}[f(-c) + f(+c)]$$

au lieu de $f(x)$.

Sur le coefficient du terme général dans certains développements;

PAR M. A.-H. ANGLIN.

L'objet de ce Mémoire est d'obtenir sous forme finie le coefficient du terme général de quelques développements, qui n'a été obtenu jusqu'ici que sous forme de séries, en déterminant la somme de certaines de ces séries.

La méthode employée est une conséquence de ce théorème que

$$a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)$$

est divisible par

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b),$$

le quotient étant h_n, où h_n est la somme des produits homogènes de a, b, c et de leurs puissances, ces produits étant de degré n.

1. Nous établirons donc d'abord ce théorème fondamental, à savoir que

$$a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)=kh_n,$$

k désignant

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$

Nous avons

$$\frac{1}{1-ax}\,\frac{1}{1-bx}\,\frac{1}{1-cx}$$
$$=(1+ax+\ldots+a^n x^n+\ldots)(1+bx+\ldots+b^n x^n+\ldots)(1+cx+\ldots+c^n x^n+\ldots)$$
$$=1+h_1 x+h_2 x^2+\ldots+h_n x^n+\ldots,$$

où h_n désigne la somme des produits homogènes de degré n, de a, b, c et de leurs puissances.

Mais on démontre aussi que

$$\frac{1}{1-ax}\,\frac{1}{1-bx}\,\frac{1}{1-cx}=\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1-bx}+\frac{C}{1-cx},$$

où

$$A=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)},\qquad B=\frac{b^2}{(b-a)(b-c)},\qquad C=\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}(1+ax+\ldots+a^n x^n+\ldots)\\&\quad+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}(1+bx+\ldots+b^n x^n+\ldots)\\&\quad+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}(1+cx+\ldots+c^n x^n+\ldots)\\&\qquad=1+h_1 x+h_2 x^2+\ldots+h_n x^n+\ldots.\end{aligned}$$

Alors, en égalant les coefficients de x dans les deux membres, nous obtenons

$$\frac{a^{n+2}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+2}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{n+2}}{(c-a)(c-b)}=h_n,$$

et par conséquent

$$a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)=kh_n.$$

2. Afin de donner une solution complète du problème qui forme le

sujet de ce Mémoire, il est nécessaire d'exposer d'abord le lemme suivant :

Dans l'expression

$$(1+ax+\ldots+a^n x^n)(1+bx+b^2x^2+\ldots+b^n x^n)(1+cx+c^2x^2+\ldots+c^n x^n),$$

où chaque facteur s'arrête au terme en x^n, le coefficient de x^n est h_n, qui renferme a^n, b^n et c^n.

Le coefficient de x^{n+1} est formé par la somme des produits homogènes de degré $n+1$, de a, b, c, moins les puissances $(n+1)^{\text{ièmes}}$, a^{n+1}, b^{n+1}, c^{n+1}; et il est ainsi égal à $h_{n+1} - s_{n+1}$, en désignant généralement par s_r la somme $a^r + b^r + c^r$.

De même, le coefficient de x^{n+2} est la somme des produits homogènes de degré $n+2$ de a, b, c, moins les termes renfermant les exposants $n+2$ et $n+1$, et il est par conséquent égal à

$$h_{n+2} - a^{n+2} - b^{n+2} - c^{n+2} - a^{n+1}(b+c) - b^{n+1}(c+a) - c^{n+1}(a+b),$$

c'est-à-dire

$$h_{n+2} - h_1 s_{n+1}.$$

Le coefficient de x^{n+3} est h_{n+3}, moins les termes renfermant les exposants $n+3$, $n+2$ et $n+1$, et l'on peut, par conséquent, montrer qu'il est égal à

$$h_{n+3} - s_{n+1} h_2.$$

Plus généralement, le coefficient de x^{n+m} est égal à la somme des produits homogènes de degré $n+m$ de a, b, c, moins les termes renfermant les exposants $n+m$, $n+m-1 \ldots n+1$, et il est par conséquent égal à

$$\begin{aligned} h_{n+m} &- a^{n+m} - a^{n+m-1}(b+c) - \ldots - a^{n+m-2}(b^2+bc+c^2) - \ldots \\ &- a^{n-1}(b^{m+1} + b^{m-2}c + b^{m-3}c^2 + \ldots + c^{m-1}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$h_{n+m} - s_{n+1} h_{m-1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(1+ax+\ldots+a^n x^n)(1+bx+\ldots+b^n x^n)(1+cx+\ldots+c^n x^n)\\ =1+h_1 x+\ldots+h_n x^n+(h_{n+1}-s_{n+1})x^{n+1}+(h_{n+2}-s_{n+1}h_1)x^{n+2}\\ +(h_{n+3}-s_{n+1}h_2)x^{n+3}+\ldots+(h_{n+m}-s_{n+1}h_{m-1})x^{n+m}+\ldots.\end{aligned}$$

En particulier, le coefficient de x^{2n+2} peut être exprimé autrement que par $a_{2n+2}-s_{n+1}h_{n+1}$, sous une forme plus commode; en effet, ce coefficient est celui de x^{2n+2} dans le produit de

$$a^n x^n(1+a^{-1}x^{-1}+a^{-2}x^{-2}+\ldots+a^{-n}x^{-n})$$

par deux expressions analogues, formées en remplaçant successivement a par b et c dans celle-là, ce qui donne le produit

$$\begin{aligned}(abc)^n x^{3n}(1+a^{-1}x^{-1}+\ldots+a^{-n}x^{-n})\\ \times(1+b^{-1}x^{-1}+\ldots+b^{-n}x^{-n})(1+c^{-1}x^{-1}+\ldots+c^{-n}x^{-n}).\end{aligned}$$

Ce coefficient de x^{2n+2} est égal à $(abc)^n$ multiplié par le coefficient de $x^{-(n-2)}$ dans l'expression

$$\begin{aligned}(1+a^{-1}x^{-1}+\ldots+a^{-n}x^{-n})\\ \times(1+b^{-1}x^{-1}+\ldots+b^{-n}x^{-n})(1+c^{-1}x^{-1}+\ldots+c^{-n}x^{-n}).\end{aligned}$$

Il est donc égal à $(abc)^n h'_{n-2}$, h'_n désignant la somme des produits homogènes de degré n, des inverses de a, b, c et de leurs puissances.

3. Nous allons maintenant considérer le coefficient général dans une certaine forme de développement, et, pour plus de clarté, nous commencerons par le chercher dans des cas particuliers avant d'aborder le cas général.

Nous avons

$$(1)\qquad a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)=kh_n,$$

où k représente $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$. En multipliant les deux membres de (1) par $a+b+c$ (qui a été désigné par s_1), et

en groupant convenablement les termes, nous aurons

$$a^{n+2}(b+c)(b-c)+b^{n+2}(c+a)(c-a)+c^{n+2}(a+b)(a-b)$$
$$=k(s_1 h_n - h_{n+1}).$$

Multipliant encore par $a+b+c$ et groupant les termes, nous aurons

$$a^{n+2}(b+c)^2(b-c)+\ldots=k(s_1^2 h_n - 2s_1 h_{n+1} + h_{n+2}),$$

et de la même manière

$$a^{n+2}(b+c)^3(b-c)+\ldots=k(s_1^3 h_n - 3s_1^2 h_{n+1} + 3s_1 h_{n+2} - h_{n+3}).$$

Enfin on peut déduire par le même procédé que

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a^{n+2}(b+c)^r(b-c)+b^{n+2}(c+a)^r(c-a)+c^{n+2}(a+b)^r(c-a) \\ \quad =k(s_1-1)^r[h]_{n+r}^n, \end{array}\right.$$

$(s_1-1)^r[h]_{n+r}^n$ étant une représentation symbolique de la suite

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{array}{l} s_1^r h_n - rs_1^{r-1} h_{n+1} + \dfrac{r(r-1)}{1.2} s^{r-2} h_{n+2} \\ \qquad - \dfrac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_1^{r-3} h_{n+3} + \ldots + (-1)^r h_{n+r}. \end{array}\right.$$

Maintenant, on a

$$(s_1 x - 1)^r = s_1^r x^r - rs_1^{r-1} x^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2} s_1^{r-2} x^{r-2} + \ldots + (-1)^r$$

et

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$$
$$=1+\ldots+h_n x^n + h_{n+1} x^{n+1} + h_{n+2} x^{n+2} + \ldots + h_{n+r} x^{n+r} + \ldots.$$

Par conséquent, la suite (A) est le coefficient de x^{n+r} dans le déve-

loppement de $\frac{(s_1 x - 1)^r}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$; et ce coefficient est alors égal à l'expression

$$\frac{a^{n+2}(b+c)^r(b-c)+b^{n+2}(c+a)^r(c-a)+c^{n+2}(a+b)^r(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

4. Si nous multiplions les deux membres de l'équation fondamentale (1) par $a^2+b^2+c^2$ (c'est-à-dire s_2) et si nous groupons les termes convenablement, nous trouvons

$$a^{n+2}(b^2+c^2)(b-c)+b^{n+2}(c^2+a^2)(c-a)+c^{n+2}(a^2+b^2)(a-b)$$
$$=k(s_2 h_n - h_{n+2}).$$

Multiplions encore par $a^2+b^2+c^2$, nous obtiendrons

$$a^{n+2}(b^2+c^2)^2(b-c)+\ldots=k(s_2^2 h_n - 2s_2 h_{n+2}+h_{n+4})$$

et de la même manière

$$a^{n+2}(b^2+c^2)^3(b-c)+\ldots=k(s_2^3 h_n - 3s_2^2 h_{n+2}+3s_2 h_{n+4}-h_{n+6}).$$

Finalement, on arrive par ce moyen au résultat suivant

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} a^{n+2}(b^2+c^2)^r(b-c)+b^{n+2}(c^2+a^2)^r(c-a) \\ \quad +c^{n+2}(a^2+b^2)^r(a-b)=k(s_2-1)^r(h)^n_{n+2r}, \end{array}\right.$$

où $(s_2-1)^r[h]^n_{n+2r}$ représente symboliquement la suite

$$(B)\qquad \left\{\begin{array}{l} s_2^r h_n - r s_2^{r-1} h_{n+2} + \frac{r(r-1)}{1.2} s_2^{r-2} h_{n+4} \\ \quad - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_2^{r-3} h_{n+6} + \ldots + (-1)^r h_{n+2r}. \end{array}\right.$$

Or

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}=\ldots+h_n x^n + h_{n+1}x^{n+1}+h_{n+2}x^{n+2}+\ldots,$$

$$\frac{1}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}=\ldots\pm h_n x^n \mp h_{n+1}x^{n+1}\pm h_{n+2}x^{n+2}\mp\ldots.$$

suivant que n est pair ou impair; de sorte que la série

$$h_n x^n + h_n x^{n+2} + h_{n+4} x^{n+4} + \ldots + h_{n+2r} x^{n+2r} + \ldots$$
$$= \frac{[1 + (bc + ca + ab)x^2] \quad \text{ou} \quad [(a+b+c)x + abc\,x^3]}{(1 - a^2x^2)(1 - b^2x^2)(1 - c^2x^2)},$$

suivant que n est pair ou impair.

Mais on a

$$(s_2 x^2 - 1)^r = s_2^r x^{2r} - r s_2^{r-1} x^{2r-2} + \frac{r(r-1)}{1.2} s_2^{r-2} x^{2r-4}$$
$$- \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_2^{r-3} x^{2r-6} + \ldots + (-1)^r.$$

Donc la suite B est le coefficient de x^{n+2r} dans le développement de

$$\frac{1 + (bc + ab + ca)x^2}{(1 - a^2x^2)(1 - b^2x^2)(1 - c^2x^2)} (s_2 x^2 - 1)^r,$$

n étant pair et dans le développement de

$$\frac{(a + b + c)x + abc\,x^3}{(1 - a^2x^2)(1 - b^2x^2)(1 - c^2x^2)} (s_2 x^2 - 1)^r,$$

n étant impair, et alors chacun de ces coefficients est égal à

$$\frac{a^{n+2}(b^2 + c^2)^r(b - c) + b^{n+2}(c^2 + a^2)^r(c - a) + c^{n+2}(a^2 + b^2)^r(a - b)}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}.$$

5. Si nous appliquons à l'équation (1) la même méthode de multiplication par $a^3 + b^3 + c^3$, puis par des sommes analogues de puissances plus élevées de a, b, c, des difficultés nouvelles en même temps que des formes intéressantes se présentent, la manière de procéder restant la même dans tous les cas; mais, pour plus de clarté, nous allons encore indiquer un cas particulier avant de passer au cas général.

Multiplions l'équation (1) par $a^4 + b^4 + c^4$ (ou s_4), comme il a été indiqué, on trouvera finalement que

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{n+2}(b^4 + c^4)^r(b - c) + b^{n+2}(c^4 + a^4)^r(c - a) + c^{n+2}(a^4 + b^4)^r(a - b) \\ \quad = k(s_4 - 1)^r [h]^n_{n+4r}, \end{array} \right.$$

où $(s_4 - 1)^r [h]_{n+4r}^n$ représente la suite

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{aligned} & s_4^r h_n - r s_4^{r-1} h_{n+4} + \frac{r(r-1)}{1.2} s_4^{r-2} h_{n+8} \\ & \qquad - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_4^{r-3} h_{n+12} + \ldots + (-1)^r h_{n+4r}. \end{aligned} \right.$$

Maintenant

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = \ldots + h_n x^n + h_{n+1} x^{n+1} + h_{n+2} x^{n+2} + \ldots.$$

Il faudrait trouver la somme des termes pris de quatre en quatre dans la série, en commençant à partir de h_n. Si nous procédons à la manière habituelle, en remplaçant x successivement par αx, βx, γx, δx, où α, β, γ, δ désignent les quatre racines de l'unité, en ajoutant membre à membre et observant que $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n = 0$, excepté lorsque n est multiple de 4, auquel cas cette expression est égale à 4, nous obtiendrons, si n est un multiple de 4,

$$\begin{aligned} & 4(\ldots + h_n x^n + h_{n+4} x^{n+4} + h_{n+8} x^{n+8} + \ldots + h_{n+4r} x^{n+4r} + \ldots) \\ & = \frac{1}{(1-a\alpha x)(\ldots)} + \frac{1}{(1-a\beta x)(\ldots)} + \frac{1}{(1-a\gamma x)(\ldots)} + \frac{1}{(1-a\delta x)(\ldots)}. \end{aligned}$$

Lorsque le second membre de cette équation est réduit à un seul terme, on voit aisément que le dénominateur de ce terme est

$$(1 - a^4 x^4)(1 - b^4 x^4)(1 - c^4 x^4);$$

et le numérateur est la somme de quatre expressions semblables de la forme

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_q x^q.$$

La première de ces expressions est égale au produit de

$$(1 - a\beta x)(1 - a\gamma x)(1 - a\delta x)$$

et de deux autres groupes de facteurs analogues obtenus en remplaçant a successivement par b et c dans celui-là.

Or on a

$$(1 - a\beta x)(1 - a\gamma x)(1 - a\delta x) = 1 + ax\alpha + a^2x^2\alpha^2 + a^3x^3\alpha^3,$$

puisque

$$\beta + \gamma + \delta = -\alpha, \qquad \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta = -\alpha(\beta + \gamma + \delta) = \alpha^2$$

et

$$\beta\gamma\delta = -\frac{1}{\alpha} = -\alpha^3.$$

Donc le premier terme du numérateur est égal à

$$\begin{aligned}&(1 + ax\alpha + a^2x^2\alpha^2 + a^3x^3\alpha^3)\\ &\quad\times(1 + bx\alpha + b^2x^2\alpha^2 + b^3x^3\alpha^3)(1 + cx\alpha + c^2x^2\alpha^2 + c^3x^3\alpha^3),\end{aligned}$$

produit qui est de la forme

$$1 + B_1x\alpha + B_2x^2\alpha^2 + \ldots + B_8x^8\alpha^8 + B_9x^9\alpha^9,$$

et les autres termes du numérateur sont obtenus en remplaçant dans celui-là α successivement par β, γ, δ.

Donc, ajoutant ces quatre expressions, et observant la remarque faite sur la valeur de $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n$, on a, pour valeur du numérateur,

$$4(1 + B_4x^4 + B_8x^8).$$

Mais, d'après le lemme, $B_4 = h_4 - s_4$ que nous désignerons par t_4 et $B_8 = \mu^3 h'_4$, μ représentant abc; nous avons donc

$$\begin{aligned}&\ldots + h_nx^n + h_{n+4}x^{n+4} + h_{n+8}x^{n+8} + \ldots + h_{n+4r}x^{n+4r} + \ldots\\ &\quad = \frac{1 + t^4x^4 + \mu^3h'_4x^8}{(1 - a^4x^4)(1 - b^4x^4)(1 - c^4x^4)}.\end{aligned}$$

Alors, si nous reprenons, comme nous l'avons déjà fait, le développement de $(s_4x^4 - 1)^r$, nous verrons que la suite C est le coefficient de x^{n+4r} dans le développement de

$$\frac{(1 + t_4x^4 + \mu^3h'_4x^8(s_4x^4 - 1)^r}{(1 - a^4x^4)(1 - b^4x^4)(1 - c^4x^4)},$$

n étant un multiple de 4; et alors ce coefficient est égal à

$$\frac{a^{n+2}(b^4+c^4)^r(b-c)+b^{n+2}(c^4+a^4)^r(c-a)+c^{n+2}(a^4+b^4)^r(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

6. Généralement, si nous appliquons le même procédé à l'équation (1) en employant $a^m+b^m+c^m$ (ou s_m) comme multiplicateur, nous aurons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &a^{n+2}(b^m+c^m)^r(b-c)+b^{n+2}(c^m+a^m)^r(c-a)+c^{n+2}(a^m+b^m)^r(a-b)\\ &\quad =k(s_m-1)^r[h]^n_{n+mr}, \end{aligned}\right.$$

où $(s_m-1)^r[h]^n_{n+mr}$ représente la suite

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned} &s_m^r h_n - r s_m^{r-1} h_{n+m} + \frac{r(r-1)}{1.2} s_m^{r-2} h_{n+2m}\\ &\qquad - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_m^{r-3} h_{n+3m} + \ldots + (-1)^r h_{n+rm}. \end{aligned}\right.$$

Il faut trouver les sommes des termes de m en m de la série

$$\ldots h_n x^n + h_{n+1} x^{n+1} + h_{n+3} x^{n+3} + h_{n+4} x^{n+4} + \ldots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \ldots,$$

n étant un multiple de m. Employons la méthode déjà indiquée, nous aurons

$$\begin{aligned} &m(\ldots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + h_{n+2m} x^{n+2m} + \ldots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \ldots)\\ &= \frac{1}{(1-a\alpha_1 x)\ldots} + \frac{1}{(1-a\alpha_2 x)\ldots} + \frac{1}{(1-a\alpha_3 x)\ldots} + \ldots + \frac{1}{(1-a\alpha_m x)\ldots}, \end{aligned}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ désignant les racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Lorsque le second membre de cette équation est réduit à un seul terme, on voit facilement que le dénominateur est égal à

$$(1-a^m x^m)(1-b^m x^m)(1-c^m x^m);$$

et le numérateur est une somme de m expressions semblables de la forme

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{3m-3} x^{3m-3}.$$

La première de ces expressions est identique au produit de

$$(1 - a\alpha_2 x)(1 - a\alpha_3 x)\ldots(1 - a\alpha_m x)$$

par deux autres groupes semblables de facteurs, qu'on obtient en remplaçant a successivement par b et c dans celui-là.

Or

$$\begin{aligned}(1 - a\alpha_2 x)(1 - a\alpha_3 x)\ldots(1 - a\alpha_m x)\\ = 1 - axS_1 + a^2x^2S_2 + \ldots + (-ax)^{m-1}S_{m-1},\end{aligned}$$

S_r désignant la somme des produits r à r de $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$, et par conséquent S_1 étant égal à $-\alpha_1$, S_2 à $-\alpha_1 S_1 = \alpha_1^2$, S_3 à $-\alpha_1 S_2 = -\alpha_1^3, \ldots$, S_{m-1} à $\frac{(-1)^{m-1}}{\alpha_1} = (-\alpha_1)^{m-1}$.

Donc le premier terme du numérateur est égal au produit des facteurs

$$[1 + ax\alpha_1 + a^2x^2\alpha_1^2 + a^3x^3\alpha_1^3 + \ldots + (ax\alpha_1)^{m-1}],$$
$$[1 + bx\alpha_1 + b^2x^2\alpha_1^2 + b^3x^3\alpha_1^3 + \ldots + (bx\alpha_1)^{m-1}]$$

et

$$[1 + cx\alpha_1 + c^2x^2\alpha_1^2 + c^3x^3\alpha_1^3 + \ldots + (cx\alpha_1)^{m-1}];$$

et ce produit est de la forme

$$1 + B_1 x\alpha_1 + B_2 x^2\alpha_1^2 + B_3 x^3\alpha_1^3 + \ldots + B_{3m-3}(x\alpha_1)^{3m-3}.$$

Les autres termes du numérateur s'obtiennent en remplaçant dans celui-là α_1 successivement par $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$.

Par conséquent, en ajoutant ces m expressions et en observant que $\alpha_1^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_m^n = 0$, excepté quand n est un multiple de m, auquel cas la valeur de cette somme est m, on obtient pour expression complète du numérateur

$$m(1 + B_m x^m + B_{2m} x^{2m}).$$

Mais, d'après le lemme, $B_m = h_m - s_m$, que nous désignerons par t_m,

et $B_{2m} = \mu^{m-1} h'_{m-3}$; donc nous avons

$$\ldots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + h_{n+2m} x^{n+2m} + \ldots + h_{n+mr} x^{n+rm} + \ldots$$
$$= \frac{1 + t_m x^m + \mu^{m-1} h'_{m-3} x^{2m}}{(1 - a^m x^m)(1 - b^m x^m)(1 - c^m x^m)}.$$

Alors, en considérant, comme ci-dessus, le développement de $(s_m x^m - 1)^r$, on verra que la suite (D) est le coefficient de x^{n+mr} dans le développement de

$$\frac{(1 + t_m x^m + \mu^{m-1} h'_{m-3} x^{2m})(s_m x^m - 1)^r}{(1 - a^m x^m)(1 - b^m x^m)(1 - c^m x^m)},$$

n étant un multiple de m; et alors ce coefficient est égal à l'expression

$$\frac{a^{n+2}(b^m + c^m)^r(b - c) + b^{n+2}(c^m + a^m)^r(c - a) + c^{n+2}(a^m + b^m)^r(a - b)}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}.$$

Sur les courbes définies par les équations différentielles

[QUATRIÈME PARTIE (1)];

PAR M. H. POINCARÉ.

CHAPITRE XVI.

ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE; POINTS SINGULIERS.

Nous allons aborder maintenant l'étude des équations différentielles d'ordre supérieur. Voici sous quelle forme nous les écrirons : soient x, y et z les coordonnées d'un point mobile dans l'espace, et t une variable auxiliaire que nous regarderons comme représentant le temps; nous écrirons

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \qquad \frac{dz}{dt} = Z.$$

X, Y et Z seront des polynômes entiers en x, y et z. Il est clair, en effet, que toute équation du second ordre et du premier degré peut être ramenée facilement à cette forme.

De même, toute équation du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre et du premier degré

(1) Voir les trois premières Parties dans ce Journal, 3e série, t. VII et VIII, et 4e série, t. I.

pourra être mise sous la forme

$$(2)\qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on a affaire à une équation du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre et de degré supérieur, on pourra écrire

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et z; et z étant une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liée à ces variables par une relation algébrique

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme entier.

Introduisons une nouvelle variable τ, nous pourrons écrire

$$\frac{dx_1}{d\tau} = X_1 \frac{dF}{dz}, \qquad \frac{dx_2}{d\tau} = X_2 \frac{dF}{dz}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{d\tau} = X_n \frac{dF}{dz},$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -X_1 \frac{dF}{dx_1} - X_2 \frac{dF}{dx_2} - \ldots - X_n \frac{dF}{dx_n}.$$

Les seconds membres de ces nouvelles équations étant des polynômes entiers par rapport aux x et à z, les équations sont ramenées à la forme (2); seulement l'ordre en est élevé d'une unité.

Si l'on veut, dans le cas des équations (2), employer le mode de représentation géométrique dont nous avons fait usage jusqu'ici, il faut regarder $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions.

La Géométrie n'est plus alors qu'un langage qui peut être plus ou moins avantageux, ce n'est plus une représentation parlant aux sens. Nous pourrons néanmoins être conduits à employer quelquefois ce langage.

Au contraire, dans le cas des équations du second ordre de la forme (1), qui est celui que nous étudierons plus particulièrement, la représentation géométrique conserve tous ses avantages, et nous continuerons à l'employer constamment.

Il arrivera aussi quelquefois qu'au lieu de considérer les trajectoires du point mobile (x, y, z) dans l'espace tout entier, nous aurons à considérer seulement les portions de ces trajectoires qui sont comprises dans une certaine région de l'espace; nous n'aurons plus besoin alors de supposer que les fonctions X, Y et Z sont des polynômes entiers, mais seulement qu'elles se comportent comme des polynômes entiers à l'intérieur de la région considérée.

Il est aisé de voir que par tout point de l'espace passe une trajectoire et une seule. Il ne peut y avoir d'exception que pour les points où les trois fonctions X, Y et Z s'annulent et que l'on appelle *points singuliers*.

Les trois équations

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0$$

représentent trois surfaces algébriques. Il peut se faire que ces trois surfaces aillent passer par une même courbe. Tous les points de cette courbe sont alors singuliers et l'on a alors une courbe singulière. Nous reviendrons plus loin sur ce cas important.

Ne considérons pour le moment que les points singuliers isolés. Deux cas peuvent se présenter :

1° Ou bien toutes les dérivées $\frac{dX}{dx}, \frac{dX}{dy}, \frac{dX}{dz}; \frac{dY}{dx}, \frac{dY}{dy}, \frac{dY}{dz}; \frac{dZ}{dx}, \frac{dZ}{dy}, \frac{dZ}{dz}$ ne sont pas nulles à la fois : c'est le cas que nous allons étudier en détail;

2° Ou bien ces neuf dérivées sont nulles à la fois. Ce cas se ramène au précédent par les procédés de Briot et Bouquet (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIe Cahier).

Supposons donc que les neuf dérivées ne soient pas nulles à la fois et formons l'équation en S

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} - S & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} - S & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation n'aura pas de racine nulle, ni de racine multiple si les polynômes X, Y et Z sont les plus généraux de leurs degrés. Je ne dirai rien du cas particulier où l'équation en S aurait des racines nulles ou multiples; je me bornerai à renvoyer à ce que j'ai dit de cas analogues dans la première Partie de ce travail (3e série, t. VII, p. 391).

Ce cas exceptionnel étant exclu, nous avons à examiner les cinq hypothèses suivantes :

Première hypothèse. — Les trois racines de l'équation en S sont réelles et de même signe.

Dans ce cas, les intégrales générales des équations (1) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(4) \qquad \frac{H_1^{S_1}}{A_1} = \frac{H_2^{S_2}}{A_2} = \frac{H_3^{S_3}}{A_3}.$$

Dans ces relations, H_1, H_2 et H_3 sont des fonctions de x, y et z, holomorphes dans le voisinage du point singulier et s'annulant en ce point singulier; S_1, S_2 et S_3 sont les racines de l'équation (3); A_1, A_2 et A_3 sont des constantes d'intégration. Ce théorème a été démontré dans ma thèse inaugurale (Paris, Gauthier-Villars, 1879), p. 70.

Il est aisé de voir que les équations (4) représentent une infinité de courbes qui vont toutes passer par le point singulier.

Donc, dans le cas qui nous occupe, toutes les trajectoires qui passent dans le voisinage du point singulier vont converger en ce point. On dit alors que le point singulier est un *nœud*.

Deuxième hypothèse. — Les trois racines de l'équation en S sont réelles, mais non de même signe.

Supposons, par exemple, que S_1 et S_2 soient positifs et S_3 négatif.

On ne pourra pas alors, en général, mettre les intégrales des équations (1) sous la forme (4).

Mais le théorème de Briot et Bouquet, dans le Mémoire cité plus haut, nous apprend qu'il existe trois intégrales particulières des équations (1), qui ont la forme suivante

$$x = \varphi_1(u), \qquad y = \varphi_2(u), \qquad z = \varphi_3(u),$$

φ_1, φ_2 et φ_3 étant des fonctions holomorphes d'une même variable u, qui s'annulent avec cette variable si le point singulier est pris pour origine.

Le théorème n'est pas tout à fait présenté sous cette forme par Briot et Bouquet; mais il est aisé de passer de l'énoncé de ces deux géomètres à celui qui précède.

Dans le cas qui nous occupe, ces trois intégrales sont réelles; nous sommes donc certains déjà que trois trajectoires, que j'appellerai T_1, T_2 et T_3, vont passer par le point singulier.

Pour pousser plus loin cette analyse, faisons un changement linéaire de variables, ou un changement de coordonnées, en prenant pour origine le point singulier et pour axes les tangentes aux trois trajectoires T_1, T_2 et T_3. Après ce changement de coordonnées, les équations (1) conserveront la même forme, et les racines de l'équation en S ne changeront pas. Seulement les termes du premier degré de X, Y et Z se réduiront respectivement à

$$S_1 x, \quad S_2 y, \quad S_3 z.$$

Cela posé, je dis que l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z$$

admettra une intégrale holomorphe s'annulant avec x et y.

Il existe en effet une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et de y et qui satisfait formellement à cette équation. Pour former les coefficients de cette série, posons

$$X = S_1 x - X', \qquad Y = S_2 y - Y', \qquad Z = S_3 z + Z',$$

et nous chercherons s'il existe une série

$$z = \Sigma \alpha_{mn} x^m y^n,$$

qui satisfasse à l'équation proposée, que nous écrirons

$$(5) \qquad S_1 x\frac{dz}{dx} + S_2 y\frac{dz}{dy} - S_3 z = X'\frac{dz}{dx} + Y'\frac{dz}{dy} + Z'.$$

Le coefficient α_{mn} de $x^m y^n$, dans la série cherchée, nous sera donné par l'équation

$$(mS_1 + nS_2 - S_3)\alpha_{mn} = \beta,$$

β étant un ensemble de termes dépendant des coefficients de X', Y', Z' ainsi que des coefficients α_{pq} où p et q sont inférieurs à m et à n. (L'un des indices p ou q peut toutefois être égal à l'indice correspondant m ou n; mais on ne peut pas avoir à la fois $p = m$, $q = n$.)

Il reste à démontrer que la série ainsi obtenue est convergente. Il n'y aurait pas de difficulté si S_3 était positif comme S_1 et S_2. Dans ce cas en effet, on n'aurait qu'à renvoyer au théorème de ma thèse inaugurale, que j'ai déjà cité plus haut.

Mais ici S_3 est négatif, et il faut se servir d'une équation auxiliaire

$$(5\,bis) \qquad S_1 x\frac{dz}{dx} + S_2 y\frac{dz}{dy} - \Sigma_3 z = X''\frac{dz}{dx} + Y''\frac{dz}{dy} + Z''.$$

Dans cette équation, Σ_3 est une quantité positive plus petite que S_1 et que S_2; X'', Y'', Z'' sont des polynômes que l'on obtient en remplaçant dans X', Y' et Z' chaque terme par sa valeur absolue.

Il existera alors une série

$$\Sigma \alpha'_{mn} x^m y^n,$$

qui satisfera formellement à l'équation (5 *bis*), et cette série sera convergente, puisque Σ_3 est positif.

Le coefficient α'_{mn} se déduira de l'équation

$$(mS_1 + nS_2 - \Sigma_3)\alpha'_{mn} = \beta',$$

β' étant formé avec les coefficients de X'', Y'', Z'' et avec les α'_{pq} comme β est formé avec les coefficients de X', Y', Z' et avec les α_{pq}. Tous les α'_{mn} sont positifs. En effet, si cela est vrai de tous les α'_{pq}, β' sera positif, puisque les coefficients de X'', Y'', Z'' sont positifs.

D'ailleurs $mS_1 + nS_2 - \Sigma_3$ est toujours positif.

Je dis maintenant que

$$|\alpha_{mn}| < \alpha'_{mn}.$$

En effet, si cela est vrai pour les indices inférieurs à m et à n, on aura

$$|\beta| < \beta'.$$

On a d'ailleurs

$$mS_1 + nS_2 - S_3 > mS_1 + nS_2 - \Sigma_3,$$

puisque Σ_3 est positif et S_3 négatif. Il vient donc

$$|\alpha_{mn}| < \alpha'_{mn},$$

ce qui prouve que la série

$$\Sigma \alpha_{mn} x^m y^n$$

est convergente.

Ainsi l'équation (5) admet bien une intégrale holomorphe comme je l'avais annoncé. Dans le langage géométrique, cela veut dire que par le point singulier passe une surface U sur laquelle sont situées une infinité de trajectoires. Les trajectoires T_1 et T_2 sont situées sur cette surface, mais il n'en est pas de même de T_3.

Si l'on remplace, dans les équations (1), z par la série $\Sigma \alpha_{mn} x^m y^n$, ces équations prennent la forme

$$(6) \qquad \frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y,$$

X et Y étant des fonctions holomorphes de x et de y s'annulant avec ces variables. Les termes du premier degré se réduisent respectivement à $S_1 x$ et à $S_1 y$.

On est donc ramené au cas des équations du premier ordre, où l'on n'avait que deux variables, x et y, représentant les coordonnées d'un point dans un plan. Les courbes définies par les équations (6) seront les projections des trajectoires situées sur la surface U; il est aisé de vérifier que, pour ces courbes planes, le point singulier est un nœud, d'où la conclusion suivante :

Toutes les trajectoires situées sur la surface U *vont se croiser au point singulier.*

On peut d'ailleurs vérifier aisément que les autres trajectoires ne vont pas passer par le point singulier; mais qu'après s'être approchées plus ou moins de ce point, elles s'en éloignent et sortent de son domaine.

Ainsi une infinité de trajectoires dont l'ensemble forme une surface, ainsi qu'une autre trajectoire isolée, viennent passer par le point singulier; toutes les autres restent à une distance finie de ce point.

Le point singulier s'appellera alors un *col*.

Troisième hypothèse. — L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées dont la somme est de même signe que la racine réelle.

Soient

$$S_1 = \alpha + \beta i, \qquad S_2 = \alpha - \beta i \qquad \text{et} \qquad S_3$$

ces trois racines. L'intégrale générale des équations (1) pourra s'écrire, comme dans la première hypothèse,

$$\frac{H_1^{S_1}}{A_1} = \frac{H_2^{S_2}}{A_2} = \frac{H_3^{S_3}}{A_3}.$$

Nous pourrons poser d'ailleurs

$$H_1 = K + iK', \qquad H_2 = K - iK',$$

K et K′ étant des fonctions holomorphes *réelles* de x, y et z.

Considérons l'équation générale

$$K^2 + K'^2 + H_3^2 = \text{const.} \tag{7}$$

Cette équation représente une infinité de surfaces s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point singulier.

Il est aisé de vérifier qu'aucune des trajectoires ne peut couper aucune de ces surfaces qu'en un seul point, si la constante du second membre est suffisamment petite. En effet, les équations d'une trajectoire quelconque peuvent s'écrire

$$K + iK' = (C + iD)H_3^{\gamma + i\delta},$$
$$K - iK' = (C - iD)H_3^{\gamma - i\delta},$$

C, D, γ et δ étant quatre constantes réelles. (Remarquons que, pour une même trajectoire, H_3 devra toujours conserver le même signe.) Les surfaces (7) sont donc des surfaces sans contact, analogues aux cycles sans contact étudiés dans les Parties précédentes.

Une trajectoire, une fois qu'elle aura pénétré à l'intérieur d'une des surfaces (7), ira toujours en se rapprochant du point singulier; mais elle ne pourra s'en rapprocher qu'asymptotiquement (comme dans le cas des *foyers* de la première Partie de ce travail); car il est aisé de voir qu'elle ne saurait aller passer par le point singulier avec une tangente déterminée.

Il y a toutefois une exception. Nous avons vu que, d'après Briot et Bouquet, il y a trois trajectoires, T_1, T_2 et T_3, dont les équations s'écrivent

$$x = \varphi_1(u), \qquad y = \varphi^2(u), \qquad z = \varphi_3(u),$$

φ_1, φ_2 et φ_3 étant des fonctions holomorphes d'une même variable u.

Ici deux de ces trajectoires sont imaginaires; mais une autre est réelle et a pour équation

$$K = K' = 0.$$

Cette trajectoire va passer par le point singulier avec une tangente déterminée.

Maintenant, il y a une infinité de trajectoires situées sur la surface

$$H_3 = 0;$$

celles-là sont des spirales analogues à celles que nous avons rencontrées dans la première Partie. Les autres seront aussi des spirales tracées sur les surfaces dont l'équation générale est

$$\frac{K^2 + K'^2}{H_3^{\frac{S_1+S_2}{S_3}}} = \text{const.}$$

Suivant la valeur de S_3 ces surfaces seront des surfaces ordinaires à plan tangent unique, ou des surfaces comparables à celle qu'engendrerait la révolution d'une parabole autour de la tangente au sommet.

Dans le second cas, les trajectoires pourraient plutôt être comparées à des tire-bouchons qu'à des spirales.

Les points singuliers de cette sorte pourront s'appeler *foyers*.

Quatrième hypothèse. — L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées dont la somme est de signe contraire à la racine réelle.

Les intégrales des équations (1) ne peuvent plus alors se mettre sous la forme (4). Les trois trajectoires T_1, T_2, T_3 définies plus haut existent toujours, mais une seule d'entre elles, T_1, est réelle.

Nous pourrons faire un changement de coordonnées, tel que l'origine soit transportée au point singulier, et que les termes du premier degré de X, Y et Z se réduisent respectivement à

$$\alpha x + \beta y, \quad \gamma x + \delta y \quad \text{et} \quad S_3 z.$$

Il arrivera alors (et on le démontrerait comme dans le deuxième cas) que l'équation

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z$$

admettra une intégrale holomorphe en x et y et s'annulant avec ces variables.

Il y a donc une surface qui passe par l'origine et sur laquelle sont tracées une infinité de trajectoires. Soit

$$z = \varphi(x, y)$$

l'équation de cette surface. Si l'on remplace z par $\varphi(x, y)$ dans X et Y, les équations (1) sont ramenées au premier ordre et représentent des courbes planes, projection sur le plan des xy des trajectoires tracées sur la surface en question. Il est aisé de voir que pour ces courbes planes l'origine est un foyer.

Il existe donc une surface sur laquelle sont tracées une infinité de trajectoires qui, tournant comme des spirales autour du point singulier, s'en rapprochent asymptotiquement.

Il y a en outre une trajectoire T_1 qui va passer par ce point singulier. Toutes les autres en restent à une distance finie.

Un pareil point peut s'appeler *col-foyer*.

Cinquième hypothèse. — L'équation (3) a une racine réelle et deux imaginaires conjuguées, dont la somme est nulle.

Ce cinquième cas doit être regardé comme un cas limite et exceptionnel, car il ne se présentera pas si les polynômes X, Y et Z sont les plus généraux de leurs degrés.

Dans ce cinquième cas, il n'arrivera pas en général que les intégrales des équations (1) puissent se mettre sous la forme (4).

Si cependant cela arrivait, et que nous posions

$$H_1 = K + iK', \qquad H_2 = K - iK',$$
$$S_1 = i\alpha, \qquad S_2 = -i\alpha,$$

on verrait aisément que toutes les trajectoires sont situées sur des surfaces, telles que

$$K^2 + K'^2 = \text{const.}$$

Nous aurions alors une trajectoire réelle T_1 passant par le point singulier et ayant pour équation

$$K = K' = 0.$$

Nous aurons également une surface $H_3 = 0$ passant par le point singulier, et sur laquelle seront tracées une infinité de trajectoires. Les trajectoires tracées sur cette surface seront des courbes fermées enveloppant le point singulier.

Les surfaces $K^2 + K'^2 = \text{const.}$ sont des espèces de gaines enveloppant la trajectoire T_1, de sorte qu'on pourrait les comparer à des cylindres ayant pour axe T_1, et qui auraient été ployés et déformés en même temps que cette trajectoire.

Les trajectoires tracées sur cette surface sont alors des espèces d'hélices dont le pas irait constamment en décroissant, de telle façon que la courbe, au lieu de s'étendre à l'infini, se rapproche asymptotiquement de la surface $H_3 = 0$.

Un pareil point singulier s'appellera un *centre*.

Si, au contraire, les intégrales ne peuvent pas se mettre sous la forme (4), le point singulier jouira des mêmes propriétés qu'un foyer ou qu'un col-foyer.

Je ne m'étendrai pas plus longtemps sur ce cas exceptionnel, en me réservant d'y revenir plus tard, si j'en avais besoin, pour quelque application. Je me bornerai, pour le moment, à renvoyer au Chapitre XI, où j'ai étudié en détail les points singuliers analogues des équations du premier ordre.

Si donc on laisse de côté le cas limite qui vient de nous occuper, les équations du second ordre ont quatre espèces de points singuliers : les cols, les nœuds, les foyers et les cols-foyers.

Il serait facile d'étendre cette théorie à des équations d'ordre n.

Remarquons seulement que, quand on fait croître n, le nombre des espèces de points singuliers croît très rapidement. Nous avons vu, en effet, qu'il était de 3 pour $n = 1$, de 4 pour $n = 2$; on verrait sans peine qu'il est de 8 pour $n = 3$ et de 10 pour $n = 4$.

Examinons maintenant le cas particulier où les trois surfaces

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0$$

se coupent suivant une même courbe, qui est alors une courbe singulière.

Nous changerons de variables en posant

$$(7) \quad x = \varphi_1(x', y', z'), \qquad y = \varphi_2(x', y', z'), \qquad z = \varphi_3(x', y', z'),$$

φ_1, φ_2 et φ_3 étant des fonctions holomorphes dans le domaine envisagé.

On pourra toujours choisir ces fonctions holomorphes de telle façon que la courbe singulière ait pour nouvelles équations

$$x' = y' = 0.$$

Soient, en effet,

$$f(x, y, z) = f_1(x, y, z) = 0$$

les équations de la courbe singulière, et soient

$$x = \alpha, \qquad y = \beta, \qquad z = \gamma$$

un point de cette courbe; soit $f_2(x, y, z)$ une fonction holomorphe quelconque s'annulant au point M. Nous poserons

$$(8)\qquad \begin{cases} x' = f(x, y, z), \\ y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Nous pourrons toujours choisir la fonction f_2 de telle sorte que le déterminant fonctionnel de f, f_1 et f_2 ne soit pas nul au point M, et par conséquent que les équations (8) puissent être résolues sous la forme (7).

Il n'y aurait d'exception que si la courbe singulière présentait un point double ou une autre singularité quelconque au point M, ce que nous ne supposerons pas.

Il résulte de là que nous pouvons toujours supposer que la courbe singulière est l'axe des z, et que le point de cette courbe qu'on envisage est l'origine.

Il faudra alors que X, Y et Z s'annulent quand x et y sont nuls à la fois.

Nous allons maintenant faire un nouveau changement de variables qui sera cette fois linéaire, et sera par conséquent un simple changement d'axes.

Il est clair, d'après ce qui précède, que les termes du premier degré de X, Y et Z doivent être de la forme

$$\alpha x + \alpha' y, \quad \beta x + \beta' y, \quad \gamma x + \gamma' y.$$

Je vais conserver pour axe des z la ligne singulière, mais je changerai le plan des xy, et je choisirai le nouveau plan des xy de telle façon que γ et γ' s'annulent.

Nous formerons alors l'équation suivante, analogue à l'équation (3), mais qui n'est plus ici que du second degré :

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} \alpha - S & \alpha' \\ \beta & \beta' - S \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette équation a deux racines réelles et de même signe ou deux

racines imaginaires conjuguées dont la somme n'est pas nulle, l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z$$

admettra une intégrale holomorphe s'annulant avec x et y. On n'a pour s'en convaincre qu'à reprendre le raisonnement que nous avons fait dans la seconde hypothèse.

Il y a donc une surface passant par le point singulier, et sur laquelle sont tracées une infinité de trajectoires. L'étude des trajectoires situées sur cette surface se ramène au cas des équations du premier ordre; il suffit, pour cela, de remplacer dans les équations (1) z par sa valeur tirée de l'équation de la surface. On voit alors que, pour les trajectoires tracées sur cette surface, le point singulier est un nœud si les racines de l'équation (9) sont réelles et de même signe, et un foyer si ces racines sont imaginaires conjuguées.

En un nœud, ainsi qu'en tous les points de la ligne singulière qui en sont assez voisins, viennent donc se croiser une infinité de trajectoires.

Autour d'un foyer ainsi qu'autour de tous les points voisins de la ligne singulière, viennent s'enrouler une infinité de trajectoires qui s'en rapprochent asymptotiquement.

Il reste à examiner le cas où l'équation (9) a ses deux racines réelles et de signe contraire. Dans ce cas, le théorème de Briot et Bouquet, cité plus haut, nous apprend qu'il existe encore deux trajectoires qui vont passer par le point singulier avec une tangente déterminée. Ce sont les deux trajectoires que nous avions appelées T_1 et T_2; quant à la trajectoire T_3, elle se réduit à la ligne singulière elle-même. Toutes les autres trajectoires restent à une distance finie du point singulier. Un pareil point singulier s'appellera un *col*.

Ainsi par un col et par tous les points assez voisins de la ligne singulière, passent deux trajectoires; toutes les autres trajectoires restent à une distance finie de la ligne singulière.

Il y aura donc sur une ligne singulière des arcs dont tous les points seront des nœuds, d'autres dont tous les points seront des foyers, d'autres dont tous les points seront des cols. Les points qui sépareront

ces arcs les uns des autres, ainsi que les points multiples de la ligne singulière, présenteront des singularités spéciales dont je ne parlerai pas ici.

Je terminerai ce Chapitre en donnant un exemple très simple de chacun des cas traités plus haut.

Points singuliers isolés : 1° *Nœuds.* — Soit

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = dt.$$

Les trajectoires sont des droites passant par l'origine.

2° *Cols.* — Soit

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z} = dt.$$

Sur la surface $z = 0$ qui passe par l'origine sont tracées une infinité de trajectoires qui sont des droites passant par l'origine. En outre, l'axe des z est aussi une trajectoire qui passe par l'origine.

Les autres trajectoires qui ont pour équations

$$xz = \text{const.}, \qquad yz = \text{const.}$$

sont des hyperboles qui restent à une distance finie de l'origine.

3° *Foyers.*

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{z} = dt.$$

L'axe des z est ici la trajectoire T_1 qui passe par l'origine.

La surface $H_3 = 0$ n'est autre chose que le plan des xy : les autres trajectoires sont tracées sur des cônes de révolution; elles se projettent toutes sur le plan des xy suivant des spirales logarithmiques; elles vont donc toutes en se rapprochant asymptotiquement de l'origine.

Remarquons qu'ici les surfaces dont nous avions écrit l'équation générale sous la forme

$$\frac{K^2 + K'^2}{H_3^{\frac{S_1+S_2}{S_2}}} = \text{const.}$$

se réduisent à des cônes de révolution. Elles ne présentent donc aucune des deux formes que j'avais attribuées à ces surfaces. En effet, nous avons affaire à un cas d'exception.

Si nous avions eu pour équations différentielles

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{\alpha z},$$

ces surfaces auraient eu un plan tangent unique pour $\alpha < 1$, et, pour $\alpha > 1$, elles auraient présenté la forme de la surface engendrée par la révolution d'une parabole autour de la tangente au sommet. Il n'y a donc d'exception que pour le cas de $\alpha = 1$.

4° *Cols-foyers.* — Soit

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{-z} = dt.$$

Une trajectoire, l'axe des z, va passer par l'origine; une infinité d'autres sont tracées sur le plan des xy et sont des spirales logarithmiques se rapprochant asymptotiquement de l'origine.

Les autres trajectoires sont situées sur les surfaces

$$(x^2 + y^2) z^2 = \text{const.},$$

et restent par conséquent à une distance finie de l'origine.

5° *Centres.* — Soit

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{z} = dt.$$

Les trajectoires ont pour équation générale

$$x^2 + y^2 = z^2, \qquad \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = \log z + A,$$

A et r^2 étant deux constantes d'intégration. Les trajectoires sont tracées sur des cylindres de révolution. Une seule d'entre elles, l'axe des z, va passer par l'origine. Une infinité se réduisent à des cercles

situés dans le plan des xy. Les autres sont des courbes qui tournent indéfiniment sur les cylindres en se rapprochant asymptotiquement du plan des xy.

Points d'une ligne singulière : 6° *Nœuds.*

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

Les trajectoires sont les droites parallèles au plan des xy et rencontrant l'axe des z, qui est la ligne singulière.

7° *Cols.*

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}.$$

Les droites $z = \text{const.}$, $x = 0$, et les droites $z = \text{const.}$, $y = 0$, sont des trajectoires qui rencontrent l'axe des z, c'est-à-dire la ligne singulière. Les autres sont situés sur les cylindres hyperboliques

$$xy = \text{const.},$$

et restent à une distance finie de l'origine.

8° *Foyers.*

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{0}.$$

Les trajectoires sont des spirales logarithmiques situées dans des plans parallèles au plan des xy; elles enveloppent la ligne singulière en s'en rapprochant asymptotiquement.

CHAPITRE XVII.

INTÉGRATION PAR LES SÉRIES.

Nous avons vu qu'une équation différentielle quelconque peut toujours se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

où les X sont des polynômes entiers.

Si l'on regarde t comme représentant le temps, ces équations définiront le mouvement d'un point mobile dans l'espace à n dimensions.

Il arrivera alors, quand le temps croîtra indéfiniment :

1° Ou bien que le point mobile restera toujours à distance finie et ne se rapprochera pas indéfiniment d'un point singulier;

2° Ou bien que le point mobile s'éloignera à l'infini;

3° Ou bien que le point mobile ira, au bout d'un temps fini, passer par un point singulier;

4° Ou bien que le point mobile ira en se rapprochant indéfiniment d'un foyer;

5° Ou bien que le point mobile viendra repasser, à des intervalles de temps finis et une infinité de fois dans le voisinage d'un point singulier, de telle sorte que sa distance à ce point singulier puisse devenir plus petite que toute quantité donnée, mais pour redevenir toujours finie dans les intervalles des différents passages.

En d'autres termes, la distance du point mobile à un point singulier quelconque peut, ou bien rester finie (premier cas et deuxième cas), ou bien tendre vers zéro (troisième et quatrième cas), ou bien osciller de façon à devenir plus petite que toute quantité donnée ε, mais sans *rester* plus petite que cette quantité ε et par conséquent sans tendre vers o (cinquième cas).

Il y a donc cinq espèces de trajectoires, et il est aisé de construire des exemples de ces cinq espèces.

Il y aurait évidemment un grand intérêt à exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à

l'aide de séries ordonnées suivant diverses fonctions du temps et convergentes pour toutes les valeurs *réelles* du temps depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = +\infty$.

Il est toujours possible de résoudre ce problème, et je vais en effet en donner une solution. Mais, d'après sa nature même, ce problème peut être résolu d'une infinité de manières. Rien ne prouve donc que la solution que je vais donner soit toujours la plus avantageuse; bien au contraire, il est extrêmement peu probable qu'une même solution convienne également bien à tous les cas particuliers possibles. Il faudra donc, pour chaque équation qu'on aura à intégrer, chercher une solution analogue, mais non identique à celle que je vais développer, et s'efforcer de la choisir convenablement en s'inspirant des conditions spéciales du problème.

Introduisons une nouvelle variable s en écrivant

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{dy} = Y_1, \qquad \frac{dx_2}{ds} = Y_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{ds} = Y_n,$$

de telle sorte que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2} = \ldots = \frac{X_n}{Y_n}.$$

Les Y seront des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant aux conditions suivantes.

Pour toutes les valeurs réelles des x et pour toutes les valeurs des x dont la partie imaginaire est comprise entre $-\beta$ et $+\beta$, les fonctions Y sont holomorphes et leur module est plus petit que M.

Si donc on a la fois :

$$\begin{aligned} &|\text{ Partie imaginaire de } x_1 | < \beta, \\ &|\text{ Partie imaginaire de } x_2 | < \beta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &|\text{ Partie imaginaire de } x_n | < \beta, \end{aligned}$$

on aura ainsi à la fois

$$|Y_1| < M, \qquad |Y_2| < M, \qquad \ldots, \qquad |Y_n| < M.$$

Soient alors

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n^0$$

un système de valeurs réelles de

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n.$$

Toutes les fois que

$$|x_1 - x_1^0| < \beta, \qquad |x_2 - x_2^0| < \beta, \qquad \ldots, \qquad |x_n - x_n^0| < \beta,$$

les fonctions Y seront holomorphes, et leur module sera plus petit que M.

Si donc nous développons Y selon les puissances croissantes de

$$x_1 - x_1^0, \quad x_2 - x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n - x_n^0,$$

les coefficients seront plus petits que ceux de

$$\frac{M\beta}{\beta - x_1 - x_2 - \ldots - x_n + x_1^0 + x_2^0 + \ldots + x_n^0} = Z.$$

Nous écrirons, en employant les notations du Chapitre XI,

$$Y \ll Z$$

les Y et Z étant supposés développés suivant les puissances des $x_i - x_i^0$.

Soit s_0 la valeur réelle de s qui correspond aux valeurs x_i^0 des x_i. En partant des équations (2), on pourra développer les x suivant les puissances de $s - s_0$,

$$x_1 = \varphi_1(s), \qquad x_2 = \varphi_2(s), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(s).$$

Si l'on suppose maintenant un autre point mobile dont les coordonnées x satisfont aux équations

$$(2\ bis) \qquad \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \ldots = \frac{dx_n}{ds} = Z.$$

on pourra aussi développer les coordonnées de ce nouveau point mobile suivant les puissances de $s - s_0$,

$$x_1 = \psi_1(s), \qquad x_2 = \psi_2(s), \qquad \ldots, \qquad x_n = \psi_n(s).$$

Les coefficients des séries ψ seront tous positifs et respectivement plus grands que les coefficients correspondants des séries φ.

Cherchons les valeurs de ψ, c'est-à-dire intégrons les équations (2 *bis*). Il viendra d'abord

$$x_1 - x_1^0 = x_2 - x_2^0 = \ldots = x_n - x_n^0.$$

Appelons u la valeur commune de ces quantités. Les équations (2 *bis*) se réduiront à

$$\frac{du}{ds} = \frac{M}{1 - \frac{u}{\beta}},$$

d'où

$$u - \frac{u^2}{2\beta} = M(s - s_0)$$

et enfin

$$u = \beta - \sqrt{\beta^2 - 2\beta M(s - s_0)}.$$

Le radical s'annule pour

$$s - s_0 = \frac{\beta}{2M}.$$

Donc les séries ψ sont convergentes toutes les fois que

$$|s - s_0| < \frac{\beta}{2M}.$$

Il en est donc de même des séries φ.

Ainsi les fonctions $\varphi(s)$ sont holomorphes à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{\beta}{2M}$ ayant son centre en un point quelconque s_0 de l'axe X des quantités réelles.

Si nous menons de part et d'autre de X deux parallèles à une dis-

tance de X égale à $\frac{\beta}{2M}$, ces deux parallèles, dont l'équation sera

$$\text{Partie imaginaire de } s = \pm \frac{\beta}{2M},$$

limiteront une bande B du plan à l'intérieur de laquelle les fonctions φ seront holomorphes.

Nous allons chercher la représentation conforme (*ähnliche Abbildung*) de cette bande sur un cercle. Soit

$$v = \frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}.$$

Cherchons la condition pour que

$$\text{mod.}\, v < 1,$$

soit

$$s = s_1 + i s_2.$$

Il vient

$$v = \frac{e^{\alpha s_1}(\cos \alpha s_2 + i \sin \alpha s_2) - 1}{e^{\alpha s_1}(\cos \alpha s_2 + i \sin \alpha s_2) + 1},$$

$$\text{mod}^2 v = \frac{(e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2 - 1)^2 + e^{2\alpha s_1} \sin^2 \alpha s_2}{(e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2 + 1)^2 + e^{2\alpha s_1} \sin^2 \alpha s_2}$$

ou

$$\text{mod}^2 v = \frac{e^{2\alpha s_1} + 1 - 2 e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2}{e^{2\alpha s_1} + 1 + 2 e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2}.$$

Pour que cette quantité soit plus petite que 1, il faut et il suffit que $\cos \alpha s_2$ soit positif, ou que

$$|\alpha s_2| < \frac{\pi}{2}.$$

En d'autres termes, le point s devra être à l'intérieur d'une bande comprise entre les deux droites

$$s_2 = \pm \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Si nous prenons

$$\alpha = \frac{M\pi}{\beta},$$

cette bande sera la bande B, et la relation entre v et s définira la représentation conforme de B sur le cercle de centre o et de rayon 1.

Si nous considérons maintenant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme fonctions, non plus de s, mais de v, ce seront alors des fonctions holomorphes à l'intérieur de ce cercle; ces quantités pourront donc être développées en séries ordonnées, suivant les puissances croissantes de v, et convergentes toutes les fois que le module de v est plus petit que 1.

Les coefficients de ces séries peuvent se calculer par récurrence.

Il n'existe, en effet, qu'un système de séries développées suivant les puissances croissantes de

$$\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1},$$

et qui satisfassent formellement aux équations (2).

Ces séries sont convergentes pour toutes les valeurs réelles de s; car, quand s est réel, le module de v est plus petit que 1.

Je vais maintenant montrer que l'on peut toujours choisir une variable s satisfaisant aux conditions précédentes. Il suffit pour cela de prendre

$$\frac{ds}{dt} = \frac{X_i}{Y_i} = 1 + X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2.$$

Je dis, en premier lieu, que

$$Y_i = \frac{X_i}{1 + \Sigma X^2}$$

sera holomorphe pour toutes les valeurs réelles des x. En effet, cette fonction ne pourrait cesser d'être holomorphe que si l'on avait

$$1 + \Sigma X^2 = 0,$$

ce qui n'est pas possible quand les x sont réels.

En second lieu, si les X sont réels, Y_i sera toujours plus petit que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

Soient $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ un système de valeurs réelles des x; et soit Δ un domaine formé de tous les systèmes de valeurs des x, tels que

$$|x_1 - x_1^0| < \rho, \qquad |x_2 - x_2^0| < \rho, \qquad \ldots \qquad |x_n - x_n^0| < \rho.$$

La quantité ρ pourra s'appeler le *rayon*, et le système de valeurs x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 pourra s'appeler le *centre du domaine* Δ.

On pourra toujours prendre le rayon de Δ assez petit pour qu'à l'intérieur de ce domaine les Y restent holomorphes et plus petites que 1 en valeur absolue; mais nous choisirons pour ρ la plus grande valeur qui satisfasse à cette condition.

Je dis maintenant que ρ restera toujours supérieur à une quantité constante ρ_0, quel que soit le centre du domaine Δ. En effet, lorsque ce centre se déplacera d'une manière continue, ρ variera aussi d'une manière continue; ρ ne pourra jamais s'annuler pour un système de valeurs finies de x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, sans quoi les fonctions Y cesseraient d'être holomorphes en ce point.

Il reste à faire voir que, quand le centre du domaine Δ s'éloignera indéfiniment, ρ ne tendra pas vers 0.

Supposons, par exemple, que x_1^0 croisse indéfiniment pendant que les autres quantités x_i^0 pourront croître aussi indéfiniment ou rester finies.

Changeons de variables en posant

$$x_1 = \frac{1}{y_1}, \qquad x_2 = \frac{y_2}{y_1}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{y_n}{y_1},$$

$$x_1^0 = \frac{1}{y_1^0}, \qquad x_2^0 = \frac{y_2^0}{y_1^0}, \qquad \ldots.$$

Nous pouvons supposer qu'en même temps que x_1^0 croît indéfiniment, les quantités y_2^0, ..., y_n^0 tendent vers des limites finies; en effet, si cela n'était pas, on n'aurait qu'à faire entre les x un changement linéaire de variables.

Nous pouvons toujours supposer : 1° que les polynômes X_1, X_2, ..., X_n sont tous d'un même degré m; 2° que les termes de degré m de ces n polynômes ne peuvent s'annuler à la fois sans que toutes les variables x_1, x_2, ..., x_n s'annulent aussi. Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on ferait un changement linéaire de variables (je veux parler ici d'une substitution linéaire fractionnaire).

Toutes ces hypothèses étant faites, nous poserons

$$X_i = \frac{1}{y_1^m} X_i',$$

et il viendra

$$Y_i = \frac{y_1^m X'_i}{y_1^{2m} + X_1'^2 + X_2'^2 + \ldots + X_n'^2}.$$

Cette fonction ne pourrait cesser d'être holomorphe par rapport aux y (si les y sont réels) que si l'on a à la fois

$$y_1 = X'_1 = X'_2 = \ldots = X'_n = 0.$$

Or cela est impossible, d'après les hypothèses faites plus haut.

Donc, si

$$y_1^0 = 0, \qquad y_2^0, \quad \ldots, \quad y_n^0$$

sont un système de valeurs réelles des y, on pourra trouver une quantité ρ', telle que les fonctions Y soient holomorphes et de module plus petit que 1, toutes les fois que

$$|y_1| < \rho', \qquad |y_2 - y_2^0| < \rho', \qquad \ldots, \qquad |y_n - y_n^0| < \rho'.$$

Cela suffit pour montrer que ρ ne tend pas vers 0.

Il en résulte qu'il existe une quantité ρ_0 qui est toujours plus petite que ρ et qui est telle, par conséquent, que les Y soient holomorphes et de module inférieur à 1, toutes les fois que les parties imaginaires de tous les x seront plus petits que ρ_0 en valeur absolue.

C. Q. F. D.

Ainsi, la variable s étant définie comme nous l'avons fait plus haut, les x peuvent se développer suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1},$$

et le développement est valable pour toutes les valeurs réelles de s ou de t.

Nous avons vu, toutefois, qu'il y aurait une difficulté si les termes

de degré le plus élevé des polynômes X pouvaient s'annuler à la fois; il suffirait alors, comme nous l'avons dit, de faire un changement de variables. Mais il est plus simple d'opérer de la façon suivante : nous pouvons toujours trouver un polynôme Z de degré m, tel que les termes de degré m des $n+1$ polynômes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et Z ne puissent s'annuler à la fois sans que tous les x s'annulent. On poserait alors

$$Y_i = \frac{X_i}{1 + X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + Z^2},$$

et l'on démontrerait, comme précédemment, que les Y restent holomorphes et de module plus petit que 1, toutes les fois que les parties imaginaires des x sont inférieures en valeur absolue à une quantité donnée ρ_0.

Les séries que nous venons de définir, et qui sont ordonnées suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}$$

représenteront toutes une trajectoire; il convient, toutefois, d'observer que si cette trajectoire va passer par un point singulier, elle devra être regardée comme coupée en ce point singulier qu'on considérera comme un point d'arrêt. En effet, le point mobile ne peut (d'après la forme même des équations) atteindre un point singulier que pour des valeurs infinies de s et de t.

Parmi les équations auxquelles on pourrait être tenté d'appliquer la méthode précédente, on peut citer les équations du problème des trois corps, auxquelles elle est effectivement applicable.

Les développements ordonnés suivant les puissances croissantes de

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}$$

seront alors valables pour toutes les valeurs du temps.

Il y aurait exception seulement si les données initiales étaient telles que deux des trois corps vinssent à se choquer au bout d'un temps fini; il arriverait alors en effet que s deviendrait infini à l'époque du choc.

Les formules ne seraient donc valables que jusqu'à l'époque du choc; mais il est évident que, pour des époques postérieures au choc, le problème est illusoire.

Soit maintenant t le temps [il s'agit ici du temps véritable et non du temps auxiliaire que j'avais introduit un peu arbitrairement dans les équations (1)]. Si l'on était sûr à l'avance que la distance de deux quelconques des trois corps restera toujours supérieure à une limite donnée (elle peut d'ailleurs croître indéfiniment), on pourrait affirmer que les coordonnées des trois corps peuvent être développées suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$$

en séries toujours convergentes.

Je ne crois pas toutefois qu'on puisse tirer grand parti des applications de cette méthode à la Mécanique céleste. Je n'ai voulu, je le répète, que donner un exemple, et non exposer une méthode qu'il convient d'appliquer dans tous les cas. On peut choisir la variable s d'une infinité de manières; le choix que j'ai fait était tout à fait arbitraire, et rien n'empêche de multiplier à l'infini les méthodes analogues à celle que je viens d'exposer.

CHAPITRE XVIII.

DISTRIBUTION DES POINTS SINGULIERS.

Ce Chapitre sera tout entier une application d'un théorème de M. Kronecker. Ce théorème est l'objet de deux Mémoires intitulés : *Ueber Systeme von Functionem mehrer Variabeln*, et ont été insérés dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin (mars 1869, août 1869).

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

une surface quelconque que je supposerai fermée.

Soit dw un élément quelconque de cette surface. Soient

$$S = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad \Sigma = +\sqrt{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dz^2}},$$

$$R = \frac{1}{\Sigma}\begin{vmatrix} 0 & \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \\ X & \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ Y & \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ Z & \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}.$$

L'intégrale

$$-\frac{1}{4\pi}\int \frac{R\,dw}{S^3},$$

étendue à tous les éléments de la surface considérée ou d'une nappe fermée quelconque de cette surface, s'appellera l'indice de cette surface ou de cette nappe.

Soit, par exemple,

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z,$$
$$F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

Notre surface est alors une sphère qui enveloppe l'origine, laquelle est un nœud.

Il vient

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a, \qquad \Sigma = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a,$$

$$R = \frac{1}{2a}\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} = -a.$$

L'indice est alors égal à

$$-\frac{1}{4\pi}\int \frac{-a\,dw}{a^3} = \frac{1}{4\pi a^2}\int dw.$$

Mais $\int dw$ est la surface de notre sphère, $F = 0$; c'est-à-dire $4\pi a^2$. L'indice est donc égal à 1.

Si $X = x$, $Y = y$, $Z = -z$, l'origine est un col et l'indice est égal à -1.

Si $X = x$, $Y = -y$, $Z = -z$, l'origine est encore un col, mais l'indice est égal à $+1$.

Si $X = -x$, $Y = -y$, $Z = -z$, l'origine est un nœud et l'indice est égal à -1.

Voici maintenant le théorème général qu'on peut déduire aisément de celui de M. Kronecker.

Nous distinguerons deux sortes de points singuliers; les points singuliers positifs, pour lesquels le déterminant

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}$$

est positif, et les points singuliers négatifs pour lesquels ce déterminant est négatif.

Il est aisé de voir qu'il y a des nœuds, des foyers, des cols et des cols-foyers positifs, et d'autre part des nœuds, des foyers, des cols et des cols-foyers négatifs.

C'est le contraire de ce qui arriverait dans le cas des équations du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Dans ce cas, en effet, tous les nœuds et tous les foyers sont positifs et tous les cols sont négatifs.

D'après le théorème de M. Kronecker, l'indice d'une surface fermée quelconque est égal au nombre des points singuliers positifs situés à l'intérieur de cette surface, diminué du nombre des points singuliers négatifs.

Supposons maintenant que la surface considérée soit une *surface*

sans contact, c'est-à-dire qu'on n'ait eu aucun point réel de cette surface

$$\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z = 0.$$

Je distinguerai d'abord, parmi les surfaces sans contact, deux espèces différentes : l'espèce positive, pour laquelle

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z > 0,$$

et l'espèce négative, pour laquelle

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z < 0.$$

Pour distinguer ces espèces, il convient de choisir F de telle sorte que F soit plus grand à l'extérieur de la surface fermée qu'à l'intérieur de cette même surface.

Cela posé, je vais montrer que l'indice d'une surface sans contact ne dépend que de son espèce et de son genre (au point de vue de l'*Analysis Situs*, Cf. IIIe Partie, Chap. XII).

Je vais faire voir que l'indice d'une surface d'espèce positive ne change pas quand on remplace X, Y et Z par $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ et $\frac{dF}{dz}$, et que celui d'une surface d'espèce négative ne change pas quand on remplace X, Y et Z par $-\frac{dF}{dx}$, $-\frac{dF}{dy}$, $-\frac{dF}{dz}$.

Représentons, en effet, la vitesse du point mobile par une flèche dont les projections sur les trois axes seront X, Y et Z. Par chacun des points de notre surface passera donc une flèche; toutes ces flèches seront dirigées vers l'extérieur, si la surface est positive, et toutes vers l'intérieur si la surface est négative.

Nous allons maintenant faire varier d'une manière continue X, Y, Z et F, de façon à déformer la surface et à faire varier les flèches. L'indice ne changera pas, pourvu qu'à aucun moment de la déformation la vitesse d'aucun point de la surface ne devienne nulle.

C'est ce qui arrivera si la surface reste constamment sans contact, et si elle conserve son genre et son espèce.

Ainsi l'indice d'une surface sans contact ne dépend que du genre et de l'espèce, et en particulier on peut remplacer X, Y et Z par $\pm \frac{dF}{dx}$, $\pm \frac{dF}{dy}$, $\pm \frac{dF}{dz}$ en prenant le signe + ou le signe —, suivant que la surface est positive ou négative.

En particulier, considérons une sphère sans contact; nous avons vu par l'exemple traité plus haut,

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z, \qquad F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2,$$

qu'une pareille sphère a pour indice + 1 si elle est positive; elle a d'ailleurs pour indice — 1 si elle est négative, comme on le voit en faisant

$$X = -x, \qquad Y = -y, \qquad Z = -z, \qquad F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

Ainsi une surface sans contact de genre 0 a pour indice ± 1, selon qu'elle est positive ou négative. Dans le cas des équations du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y,$$

un cycle sans contact avait toujours pour indice + 1, qu'il fût positif ou négatif.

Il résulte de là les conséquences suivantes :

A l'intérieur d'une surface sans contact de genre 0 et positive, le nombre des points singuliers positifs est supérieur d'une unité à celui des points singuliers négatifs; il lui est inférieur d'une unité si la surface est négative.

A l'intérieur d'une surface sans contact de genre 0, il y a toujours au moins un point singulier.

Ce sont des considérations analogues qui, dans le cas du premier ordre, nous avaient conduits à une relation entre le nombre des cols, des foyers et des nœuds. Nous n'avons ici rien à attendre de semblable. C'était en effet une relation entre le nombre des points singuliers positifs (à savoir les nœuds) et les foyers et le nombre des points singuliers négatifs (à savoir le col). Mais, dans le cas qui nous occupe

maintenant, un nœud, un col, un foyer ou un col-foyer peut aussi bien être positif que négatif. C'est ce qui empêche la relation dont je viens de parler de se généraliser.

Soit maintenant une surface sans contact de genre 0 et positive; et une seconde surface sans contact de genre 0 et négative, intérieure à la première. Soit E l'espace compris entre les deux surfaces. La différence des indices est égale à 2. Donc le nombre des points singuliers positifs situés dans l'espace E est supérieur de deux unités à celui des points singuliers négatifs. (Il lui serait inférieur de deux unités si la surface positive était intérieure à la surface négative.)

Donc, entre deux surfaces sans contact de genre 0 et d'espèce différente, il y a toujours au moins deux points singuliers.

Cherchons maintenant l'indice d'une surface sans contact de genre 1. Soit

$$F = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = c^4$$

l'équation générale d'une famille de surfaces, c^4 étant un paramètre arbitraire (surfaces engendrées par la révolution d'un système d'ovales de Cassini).

Les surfaces $F = c^4$ sont de genre 0 si $c > a$, et de genre 1 si $c < a$. Si $c = a$, la surface $F = a^4$ admet un point conique.

Les équations différentielles des trajectoires orthogonales de ces surfaces seront

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dy}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dz}.$$

Pour ces trajectoires, il n'y a qu'un point singulier qui est l'origine, et ce point singulier est positif, comme il est aisé de s'en assurer.

De plus, pour ces mêmes trajectoires, les surfaces $F = c^4$ seront des surfaces sans contact positives.

Soient donc deux surfaces $F = b^4$, $F = d^4$, $(b^4 < a^4 < d^4)$: la première sera de genre 1, la seconde de genre 0; l'indice de la seconde est $+1$; soit I l'indice de la seconde. La différence des indices devra être égale au nombre des points singuliers positifs compris entre les deux surfaces, moins le nombre des points singuliers négatifs. Or il y a entre les deux surfaces un point singulier positif et pas de point sin-

gulier négatif. On a donc

$$1 - I = +1,$$

d'où

$$I = 0.$$

Ainsi l'indice d'une surface sans contact de genre 1 et positive est nul, et il en serait de même de l'indice d'une surface sans contact de genre 1 et négative.

En raisonnant de la même manière, on verrait que l'indice d'une surface sans contact de genre p est $-(p-1)$ si elle est positive, et $+(p-1)$ si elle est négative.

La conséquence immédiate de ce résultat est qu'à l'intérieur d'une surface sans contact quelconque, il y a toujours des points singuliers, à moins que cette surface ne soit de genre 1, auquel cas on ne sait rien.

Soient deux surfaces sans contact, l'une extérieure à l'autre; et soit E l'espace compris entre ces deux surfaces.

Si ces surfaces sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, l'espace E contiendra toujours des points singuliers, à moins que les deux surfaces ne soient de même genre.

Si ces deux surfaces sont l'une positive et l'autre négative, l'espace E contiendra toujours des points singuliers, à moins que les deux surfaces ne soient l'une de genre 0 et l'autre de genre 2 ou toutes deux de genre 1.

Il est aisé d'étendre les résultats qui précèdent au cas général des équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt.$$

Soit, en effet,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

l'équation d'une multiplicité $(n-1)^{\text{ième}}$ (*Mannigfaltigkeit*) qui jouera dans l'espace à n dimensions le même rôle qu'une surface dans l'espace ordinaire.

Soit dw un élément quelconque de cette multiplicité. Soient

$$S = +\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2},$$

$$\Sigma = +\sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dF}{dx_n}\right)^2}.$$

Soit Δ un déterminant où le premier élément de la première colonne est 0; où le $(i+1)^{\text{ième}}$ élément de la première colonne est X_i; où le $(i+1)^{\text{ième}}$ élément de la première ligne est $\frac{dF}{dx_i}$; ou enfin le $k+1^{\text{ième}}$ élément de la $(i+1)^{\text{ième}}$ colonne est $\frac{dX_k}{dx_i}$.

Soit ϖ l'intégrale

$$\int dw$$

étendue à tous les éléments de la multiplicité

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

L'intégrale

$$-\frac{1}{\varpi}\int \frac{\Delta\, dw}{\Sigma S^n},$$

étendue à tous les éléments de la multiplicité $F = 0$, sera l'indice de cette multiplicité.

La distinction des points singuliers positifs et négatifs se fera comme dans le cas particulier déjà étudié, et l'on verra que l'indice d'une multiplicité est égal au nombre des points singuliers positifs situés à l'intérieur de cette multiplicité, diminué du nombre des points singuliers négatifs.

Mais il y a lieu ici de faire une remarque importante. Pour classer les points singuliers, on forme l'équation en S,

$$\begin{vmatrix} \frac{dX_1}{dx_1} - S & \frac{dX_1}{dx_2} & \ldots & \frac{dX_1}{dx_n} \\ \frac{dX_2}{dx_1} & \frac{dX_2}{dx_2} - S & \ldots & \frac{dX_2}{dx_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{dX_n}{dx_1} & \frac{dX_n}{dx_n} & \ldots & \frac{dX_n}{dx_n} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons que cette équation de degré n ait p racines réelles positives, q racines réelles négatives; $2r$ racines imaginaires à partie réelle positive; $2s$ racines imaginaires à partie réelle négative. On a

$$p + q + 2r + 2s = n.$$

Les quatre nombres p, q, r, s caractériseront le point singulier et feront connaître la forme des trajectoires dans le voisinage de ce point. Toutefois, les points (p, q, r, s) et les points (q, p, s, r) devront être regardés comme de même espèce, c'est-à-dire que la forme des trajectoires est la même dans les deux cas.

Ainsi, si nous faisons $n = 3$, on voit que pour les équations

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = y, \qquad \frac{dz}{dt} = z,$$

l'origine, qui est un point singulier caractérisé par les quatre nombres (3, 0, 0, 0), est un nœud de même que pour les équations

$$\frac{dx}{dt} = -x, \qquad \frac{dy}{dt} = -y, \qquad \frac{dz}{dt} = -z,$$

où elle est caractérisée par les quatre nombres (0, 3, 0, 0).

Maintenant un point singulier est positif si q est pair, et négatif si q est impair.

Il est aisé de voir que si n est pair,

$$p \equiv q \qquad (\text{mod. } 2),$$

et que si n est impair,

$$p \equiv q + 1 \qquad (\text{mod. } 2).$$

D'où il suit que, si n est pair, les deux points singuliers (p, q, r, s) et (q, p, r, s) sont tous deux positifs ou tous deux négatifs. Si, au contraire, n est impair, ces deux points singuliers sont de signe contraire.

Il résulte de là que, si n est pair, deux points singuliers de même espèce sont toujours de même signe, et qu'il n'en est plus de même si n est impair.

C'est ainsi que, pour $n = 2$, les foyers et les nœuds sont toujours positifs et les cols toujours négatifs, et que, pour $n = 3$, les nœuds (de même que les foyers, les cols et les cols-foyers) peuvent être positifs ou négatifs.

On définira, comme on l'a fait plus haut pour les surfaces, les multiplicités $(n-1)^{\text{ième}}$ sans contact qui pourront se répartir en deux espèces, l'espèce positive et l'espèce négative.

Une multiplicité $(n-1)^{\text{ième}}$ sera caractérisée au point de vue de l'*Analysis Situs* par ses $n-2$ ordres de connexions tels qu'ils sont définis par Riemann (*Gesammelte Werke;* Leipzig, Teubner, 1876, p. 448), et par Brioschi (*Annali di Matematica,* t. V).

L'indice d'une multiplicité sans contact ne dépendra que de ses ordres de connexion et de son espèce.

Considérons maintenant deux multiplicités sans contact, ayant mêmes ordres de connexion et étant l'une positive, l'autre négative; leurs indices seront égaux et de même signe si n est pair, égaux et de signe contraire si n est impair.

Une multiplicité sans contact, simplement connexe et positive, aura pour indice $+1$. Le nombre des points singuliers positifs situés à l'intérieur surpassera d'une unité le nombre des points singuliers négatifs.

Si n est pair, les points singuliers de même espèce seront toujours de même signe, et nous aurons ainsi une relation entre le nombre des points singuliers des différentes espèces. Nous n'en aurons pas si n est impair. C'est ainsi que nous avons obtenu une pareille relation pour $n=2$, et que nous n'en avons pas obtenu pour $n=3$.

Soient M et M′ deux multiplicités sans contact ayant mêmes ordres de connexion, la première positive, la seconde négative, la première extérieure à la seconde. Soit E l'espace compris entre M et M′.

Lorsque n sera impair, l'espace E contiendra toujours des points singuliers si l'indice de M n'est pas nul, et en particulier si M est simplement connexe. Nous ne pourrons, au contraire, rien affirmer si n est pair.

CHAPITRE XIX.

ÉTUDE DES COURBES FERMÉES.

Parmi les trajectoires d'un point mobile, définies par les équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt,$$

il peut y en avoir qui soient des courbes fermées. Nous allons voir qu'on peut faire, au sujet des trajectoires qui s'approchent assez près d'une

trajectoire fermée, une théorie tout à fait analogue à celle que nous avons faite au Chapitre XVI pour les trajectoires qui s'approchent assez près d'un point singulier; de sorte que ces courbes fermées jouent dans une certaine mesure le même rôle que les points singuliers.

Il faudrait d'abord savoir reconnaître s'il existe des trajectoires fermées ; mais je ne puis, pour le moment, donner à ce sujet beaucoup de développements. Je me bornerai, en me réservant de revenir plus tard sur ce point, à donner ici un exemple simple.

Soit un tore sans contact à l'intérieur duquel il n'y ait aucun point singulier.

Coupons-le par des plans méridiens, et supposons que ces plans n'aient non plus aucun contact avec les trajectoires à l'intérieur du tore.

Prenons un système particulier de coordonnées. Supposons d'abord qu'on ait choisi pour axe des z l'axe du tore, et pour plan des x, y son plan de symétrie, de telle sorte que son équation s'écrive

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Posons ensuite

$$z = \eta, \qquad x = (\xi + R)\cos\omega, \qquad y = (\xi + R)\sin\omega,$$

de telle sorte que l'équation du tore devienne

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2.$$

Les plans méridiens $\omega = \text{const.}$ étant sans contact, $\frac{d\omega}{dt}$ sera constamment de même signe, constamment positif, par exemple. Quant au tore, je supposerai, pour fixer les idées, que c'est une surface sans contact négative, de telle sorte que le point mobile, une fois entré à l'intérieur du tore, ne puisse plus en sortir. Par le point M_0 intérieur au tore et ayant pour coordonnées

$$\xi = \xi_0, \qquad \eta = \eta_0, \qquad \omega = 0,$$

je fais passer une trajectoire; au bout d'un certain temps t, le point

mobile parti de sa position initiale M_0 se trouvera en un point M_1 intérieur au tore, et dont les coordonnées seront

$$\xi = \xi_1, \qquad \eta = \eta_1, \qquad \omega = 2\pi.$$

Posons

$$\Xi = \xi_1 - \xi_0, \qquad H = \eta_1 - \eta_0;$$

Ξ et H seront des fonctions holomorphes de ξ_0 et de η_0. Si l'on a

$$\Xi = H = 0,$$

la trajectoire qui passe par le point M_0 sera fermée.

Dans le plan méridien $\omega = 0$, appelons *indice* d'une courbe quelconque,

$$F(\xi_0, \eta_0) = 0,$$

l'intégrale suivante

$$-\frac{1}{2\pi}\int \frac{R\,ds}{S^2},$$

étendue à tous les éléments ds de cette courbe. Dans cette expression on pose, comme dans l'intégrale de M. Kronecker,

$$S = \sqrt{\Xi^2 + H^2}, \qquad \Sigma = \sqrt{\frac{dF^2}{d\xi_0^2} + \frac{dF^2}{d\eta_0^2}}$$

et

$$R = \frac{1}{\Sigma}\begin{vmatrix} 0 & \frac{dF}{d\xi_0} & \frac{dF}{d\eta_0} \\ \Xi & \frac{d\Xi}{d\xi_0} & \frac{d\Xi}{d\eta_0} \\ H & \frac{dH}{d\xi_0} & \frac{dH}{d\eta_0} \end{vmatrix}.$$

Considérons, en particulier, la courbe

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 = r^2,$$

c'est-à-dire le cercle méridien du tore. Si l'on observe que l'on a constamment, le long de cette courbe,

$$\xi_0 \Xi + \eta_0 H < 0,$$

et, par conséquent,

$$\Xi \frac{dF}{d\xi_0} + H \frac{dF}{d\eta_0} < 0,$$

on verra sans peine que l'indice de notre cercle méridien est égal à $+1$.

Donc il y a à l'intérieur de ce cercle au moins un point ξ_0, η_0 pour lequel Ξ et H s'annulent; donc il y a à l'intérieur du tore une trajectoire fermée. C. Q. F. D.

Je rappellerai en outre que, dans une Note insérée au Tome I du *Bulletin astronomique*, et intitulée *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps*, j'ai montré que les équations de la Mécanique céleste admettent certaines intégrales particulières qui peuvent, à un certain point de vue, être regardées comme représentant des trajectoires fermées.

Supposons donc que, d'une façon ou d'une autre, on ait démontré l'existence d'une trajectoire fermée. Appelons s l'arc de cette trajectoire, compté à partir d'une certaine origine, et l la longueur totale de la courbe. Nous ferons usage d'un système particulier de coordonnées.

Soient O l'origine des arcs, M un point quelconque de la trajectoire fermée. Soit s l'arc OM. Au point M, je mène un plan normal à la trajectoire, dans ce plan, et par le point M deux axes rectangulaires. Soient x et y les coordonnées d'un point de ce plan normal, par rapport à ces deux axes.

Un point quelconque de l'espace sera alors déterminé par ces trois coordonnées x, y et s. Ce système de coordonnées convient pour représenter un point très voisin de la trajectoire fermée.

Soit P_0 un point du plan normal $s = 0$ de coordonnées x_0, y_0 et 0. Si x_0 et y_0 sont suffisamment petits, la trajectoire qui passe par le point P_0 ira couper successivement tous les plans normaux, de telle façon que s ira constamment en croissant. Elle finira par couper en un point P_1 de coordonnées x_1, y_1 et l le plan normal $s = l$, qui n'est d'ailleurs autre chose que le plan $s = 0$ lui-même. Si x_0 et y_0 sont assez petits, x_1 et y_1 sont des fonctions holomorphes de x_0 et y_0 s'an-

nulant avec ces variables. Soient

$$x_1 = \alpha x_0 + \beta y_0 + R,$$
$$y_1 = \gamma x_0 + \delta y_0 + R',$$

R et R′ désignant un ensemble de termes de degré supérieur au premier en x_0 et y_0.

Posons

$$s = \frac{lt}{2\pi},$$

les équations différentielles pourront s'écrire

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Les fonctions X et Y seront des séries développées suivant les puissances croissantes de x et y, et convergentes si x et y sont assez petits. Les coefficients de ces séries seront eux-mêmes des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de t. Enfin X et Y s'annuleront avec x et y. Soient

$$hx + ky, \quad h'x + k'y$$

les termes du premier degré de X et de Y. Les coefficients h, k, h' et k' seront, comme nous l'avons dit, des séries trigonométriques. Considérons les équations

$$\frac{dx}{dt} = hx + ky, \qquad \frac{dy}{dt} = k'x + k'y.$$

Leurs intégrales seront de la forme suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = A_1 e^{\lambda_1 t} \varphi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t} \varphi_2(t), \\ y = A_1 e^{\lambda_1 t} \psi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t} \psi_2(t). \end{cases}$$

Dans ces expressions A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration, φ_1, φ_2, ψ_1 et ψ_2 seront des séries trigonométriques. Quant à λ_1 et λ_2,

ce sont des constantes qui nous sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha - e^{2\lambda\pi} & \beta \\ \gamma & \delta - e^{2\lambda\pi} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(2) \qquad S^2 - (\alpha + \delta) S + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0, \qquad S = e^{2\lambda\pi}.$$

Étudions maintenant les divers cas qui peuvent se présenter.

Premier cas. — Il peut arriver que les deux racines de l'équation en S soient imaginaires conjuguées, et que leur module ne soit pas égal à 1.

On trouve alors

$$\lambda_1 = \lambda + i\lambda', \qquad \lambda_2 = \lambda - i\lambda', \qquad A_1 = A e^{i\theta}, \qquad A_2 = A e^{-i\theta},$$
$$\varphi_1 = \varphi + i\varphi', \qquad \varphi_2 = \varphi - i\varphi', \qquad \psi_1 = \psi + i\psi', \qquad \psi_2 = \psi - i\psi',$$

λ, λ', A, A', φ, φ', ψ et ψ' étant réels. De plus, λ n'est pas nul. Nous supposerons, pour fixer les idées,

$$\lambda > 0.$$

Les équations (1) deviennent

$$(1\ bis) \quad \begin{cases} x = A e^{\lambda t}[\cos(\lambda' t + \theta)\, \varphi(t) - \sin(\lambda' t + \theta)\, \varphi'(t)], \\ y = A e^{\lambda t}[\cos(\lambda' t + \theta)\, \psi(t) - \sin(\lambda' t + \theta)\, \psi'(t)]. \end{cases}$$

Posons

$$F(x, y, t) = \frac{(x\psi' - y\varphi')^2 + (x\psi - y\varphi)^2}{(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2}.$$

Les surfaces

$$F(x, y, t) = C$$

seront (si x, y, et par conséquent C, sont assez petits) des surfaces de genre 1 à l'intérieur desquelles la trajectoire fermée se trouvera contenue.

Si dans F on remplace x et y par leurs valeurs (1 *bis*), il vient

$$F = A^2 e^{2\lambda t},$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\lambda A^2 e^{2\lambda t} > 0.$$

Mais si l'on observe que les équations (1 *bis*) sont les intégrales des équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = hx + ky, \qquad \frac{dy}{dt} = h'x + k'y,$$

on verra que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{dt} + \frac{dF}{dx}(hx + ky) + \frac{dF}{dy}(h'x + k'y).$$

On a donc

$$\frac{dF}{dt} + \frac{dF}{dx}(hx + ky) + \frac{dF}{dy}(h'x + k'y) > 0.$$

Mais, si x et y sont assez petits, $hx + ky$ et $h'x + k'y$ différeront assez peu de X et Y, de sorte qu'on aura

$$\frac{dF}{dt} + X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} > 0.$$

Ainsi donc les surfaces $F = C$ sont des surfaces sans contact, si C est assez petit.

Si $\lambda > 0$, ces surfaces sont positives, et le point mobile va constamment en s'éloignant de la trajectoire fermée.

Si, au contraire, $\lambda < 0$, nos surfaces sont négatives, et le point mobile se rapproche asymptotiquement de la trajectoire fermée.

Second cas. — Il peut arriver ensuite que l'équation en S ait ses deux racines réelles positives, et toutes deux plus grandes que 1. Alors λ_1 et λ_2 sont réels et positifs.

Posons

$$\xi = \frac{x\psi_2 - y\varphi_2}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}, \qquad \eta = \frac{x\psi_1 - y\varphi_1}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1},$$

$$F = \xi^2 + \eta^2.$$

On verrait, comme précédemment, que, si C est assez petit, les surfaces $F = C$ sont des surfaces de genre 1 contenant la trajectoire fermée, et que de plus on a

$$\frac{dF}{dt} + X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} > 0,$$

ce qui montre que les surfaces $F = C$ sont sans contact et positives.

Cela prouve que le point mobile, infiniment voisin de la trajectoire fermée pour $t = -\infty$, va constamment en s'en éloignant.

Si, au contraire, les deux racines de l'équation en S étaient réelles, positives et toutes deux plus petites que 1, la même analyse montrerait que les surfaces $F = C$ sont sans contact et négatives. Par conséquent, le point mobile se rapprocherait asymptotiquement de la trajectoire fermée.

Troisième cas. — Les deux racines de l'équation en S sont toutes deux réelles positives, mais l'une plus grande et l'autre plus petite que 1. Alors les deux λ sont réels et de signe contraire.

Je dis que dans ce cas on peut, dans le plan normal $s = 0$, faire passer deux courbes K et K′ qui rencontrent la trajectoire fermée aux points $x = 0$, $y = 0$, $s = 0$ et qui, de plus, jouissent des deux propriétés suivantes :

1° On peut mettre leur équation sous la forme

$$x = \varphi(u), \qquad y = \psi(u),$$

φ et ψ étant des fonctions holomorphes d'une même variable u, s'annulant avec cette variable.

2° Si le point x_0, y_0 est sur l'une des courbes K ou K′, il en sera de même du point x_1, y_1.

En effet, nous pouvons toujours, par un changement linéaire de variables, amener les relations qui lient x_1, y_1 à x_0, y_0 à la forme suivante :

$$(3) \qquad \begin{cases} y_1 = S_1 y_0 + \Phi_1(x_0, y_0), \\ x_1 = S_2 x_0 + \Phi_2(x_0, y_0), \end{cases}$$

Φ_1 et Φ_2 étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de x_0 et y_0, et commençant par des termes du second degré.

Soit

$$y = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots = \psi(x)$$

l'équation de la courbe K. Nous devrons avoir identiquement

$$S_1 \psi(x_0) + \Phi_1[x_0, \psi(x_0)] = \psi\{S_2 x_0 + \Phi_2[x_0, \psi(x_0)]\}.$$

En identifiant les deux membres de cette égalité, on trouve une série de relations qui donneront successivement

$$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

Nous supposerons $S_1 > 1 > S_2$. Nous pourrons toujours trouver deux quantités positives M et β telles que l'on ait, en employant la notation du Chapitre XI,

$$-\Phi_1(x_0, y_0) \ll \frac{M\beta^2(x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}. \qquad \Phi_2(x_0, y_0) \ll \frac{M\beta^2(x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}.$$

Cela posé, considérons, à côté des équations (3), les équations auxiliaires

$$(3\ bis) \qquad \begin{cases} y_1 = S_2 y_0 - \dfrac{M\beta^2(x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}, \\ x_1 = S_2 x_0 + \dfrac{M\beta^2(x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}. \end{cases}$$

Si nous raisonnons sur ces équations (3 *bis*) comme nous l'avons fait sur les équations (3), nous verrons qu'il existe une série

$$y = \alpha'_2 x^2 + \alpha'_3 x^3 + \ldots + \alpha'_n x^n + \ldots = \psi'(x)$$

qui satisfait à la condition

$$S_2 \psi'(x_0) - \frac{M\beta^2[x_0+\psi'(x_0)]^2}{1-\beta[x_0+\psi'(x_0)]} = \psi'\left\{S_2 x_0 + \frac{M\beta^2[x_0+\psi'(x_0)]^2}{1-\beta[x_0+\psi'(x_0)]}\right\}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\psi(x) \ll \psi'(x).$$

Or la série $\psi'(x)$ est convergente; car on l'obtient en résolvant l'équation

$$\psi' = \frac{M\beta^2}{S_2 - S_2^2}(x+\psi')^2 + \frac{M\beta^3}{S_2 - S_2^3}(x+\psi')^3 + \ldots + \frac{M\beta^n}{S_2 - S_2^n}(x+\psi') + \ldots.$$

La série ψ est donc également convergente. C. Q. F. D.

On démontrerait de même l'existence de la courbe K′, qui aurait pour équation

$$x = \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \ldots + \beta_n y^n + \ldots.$$

L'existence des courbes K et K′ étant établie, on reconnaîtrait sans peine que les trajectoires se répartissent en trois :

1° Celles qui rencontrent la courbe K; les points qui décrivent ces trajectoires, infiniment voisins de la trajectoire fermée pour $t = -\infty$, vont constamment en s'en éloignant;

2° Celles qui rencontrent la courbe K′, et qui vont en se rapprochant asymptotiquement de la trajectoire fermée;

3° Enfin les autres trajectoires restent à une distance finie de la trajectoire fermée.

Il resterait à examiner le cas où une ou deux des racines de l'équation en S seraient négatives; mais il ne peut pas arriver qu'une seule des racines soit négative, et si elles le sont toutes deux, on retombe sur les formules du premier cas en y faisant

$$\lambda' = \tfrac{1}{2}.$$

Il est impossible de n'être pas frappé de l'analogie que présente l'analyse qui précède avec la théorie des points singuliers. Le premier cas (les deux λ imaginaires) correspond au cas des foyers; le second cas (les deux λ réels et de même signe) correspond au cas des nœuds, et le troisième (les deux λ réels et de signe contraire) correspond au cas des cols. Il nous restera à examiner un cas exceptionnel, celui où les deux S sont imaginaires conjugués, et ont pour module 1. Ce cas correspond à celui que nous avons étudié en détail au Chapitre XI. Nous allons voir l'analogie se poursuivre pendant un certain temps, et nous trouverons des résultats tout à fait semblables à ceux de ce

Chapitre. Mais, en approfondissant notre analyse, nous verrons surgir des différences essentielles, et nous rencontrerons des difficultés tout à fait nouvelles.

Mettons les équations différentielles sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots = X,$$

$$\frac{dy}{dt} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n + \ldots = Y;$$

X_i et Y_i seront des polynômes homogènes de degré i en x et en y, dont les coefficients seront des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Posons maintenant

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_i + \ldots + F_n,$$

F sera un polynôme entier en x et en y, dont les coefficients seront des séries trigonométriques de t; et F_i représentera l'ensemble des termes de degré i en x et en y.

Le polynôme F ne contient donc ni terme de degré 0, ni terme de degré 1.

Nous allons chercher à déterminer $F_2, F_3, \ldots, F_{p-1}$ de telle façon que, dans l'expression

$$\Phi = \frac{dF}{dx} X + \frac{dF}{dy} Y + \frac{dF}{dt},$$

tous les termes de degré inférieur à p en x et y soient nuls.

Si nous posons

$$\Phi_{iK} = \frac{dF_i}{dx} X_K + \frac{dF_i}{dy} Y_K,$$

il viendra

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dF_2}{dt} + \Phi_{21} = 0, \\ \dfrac{dF_3}{dt} + \Phi_{31} = -\Phi_{22}, \\ \dfrac{dF_4}{dt} + \Phi_{41} = -\Phi_{32} - \Phi_{23}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dF_{p-1}}{dt} + \Phi_{p-1,1} = -\Phi_{p-2,2} - \Phi_{p-3,3} - \ldots - \Phi_{2,p-2}. \end{array} \right.$$

La première de ces équations nous donnera F_2, la seconde F_3, ..., et la $p-1^{\text{ième}}$ nous donnera F_{p-1}, pourvu toutefois qu'il soit possible d'y satisfaire.

D'après les hypothèses que nous avons faites au sujet des racines de l'équation en S, il est toujours possible de satisfaire à la première des équations (4). En effet, les intégrales des équations linéaires

$$(5) \qquad \frac{dx}{dt} = X_1, \qquad \frac{dy}{dt} = Y_1$$

pourront, comme dans le premier cas, se mettre sous la forme (1 *bis*), avec cette différence que λ sera nul; on aura donc, pour les intégrales de ces équations (5),

$$x = A[\cos(\lambda' t + \theta)\varphi(t) - \sin(\lambda' t + \theta)\varphi'(t)],$$
$$y = A[\cos(\lambda' t + \theta)\psi(t) - \sin(\lambda' t + \theta)\psi'(t)].$$

Si nous posons

$$\xi = \frac{x\psi' - y\varphi'}{\varphi\psi' - \psi\varphi'}, \qquad \eta = \frac{x\psi - y\varphi}{\varphi\psi' - \psi\varphi'},$$

et que nous prenions ξ et η pour nouvelles variables à la place de x et de y (ce qui est un changement de variables linéaires en ce qui concerne x et y, mais non linéaire en ce qui concerne t), les équations (5) deviendront

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda'\eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\lambda'\xi.$$

Nous pourrons toujours supposer que ce changement de variables ait été fait, et par conséquent que

$$X_1 = \lambda' y, \qquad Y_1 = -\lambda' x.$$

Nous prendrons donc

$$F_2 = x^2 + y^2.$$

Les autres équations (1) s'écriront alors

$$(6) \qquad \frac{dF_q}{dt} + \lambda'\left(y\frac{dF_q}{dx} - x\frac{dF_q}{dy}\right) = H_q,$$

où F_q est un polynôme homogène de degré q qu'il s'agit de déterminer, et où H_q est un polynôme de même degré que l'on peut regarder comme donné, car il ne dépend que de $F_2, F_3, \ldots, F_{q-1}$, que l'on a dû calculer avant F_q. Les coefficients de H_q, comme ceux de F_q, sont d'ailleurs des séries trigonométriques en t.

Si l'on pose

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega,$$

il viendra

$$F_q = \rho^q \varphi(\omega, t), \qquad H_q = \rho^q \psi(\omega, t),$$

$\varphi(\omega, t)$ et $\psi(\omega, t)$ étant des séries trigonométriques dépendant des deux arguments ω et t.

L'équation (6) devient alors

$$(6\ bis) \qquad \frac{d\varphi}{dt} - \lambda' \frac{d\varphi}{d\omega} = \psi(\omega, t).$$

On peut toujours trouver une série trigonométrique φ en ω et en t satisfaisant à cette équation, pourvu que la série trigonométrique $\psi(\omega, t)$ ne contienne pas de terme C_0 indépendant de ω et de t (et que, d'ailleurs, λ' soit incommensurable, ce que nous supposerons).

Si C_0 n'est pas nul, il est impossible de satisfaire à l'équation (6); mais on peut choisir F_q de telle façon que l'on ait toujours

$$\frac{dF_q}{dt} + \lambda'\left(y\frac{dF_q}{dx} - x\frac{dF_q}{dy}\right) < H_q$$

si C_0 est positif (l'inégalité changeant de sens, si C_0 est négatif).

Nous prendrons pour cela

$$F_q = \rho^q \varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dt} - \lambda' \frac{d\varphi}{d\omega} = \psi - C_0.$$

Si nous envisageons alors le polynôme de degré q,

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_q,$$

l'expression

$$\Phi = X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dt}$$

sera une série ordonnée suivant les puissances de x et de y, et dont les coefficients seront des séries trigonométriques de t. Les termes du degré le moins élevé de Φ se réduiront d'ailleurs à

$$-C_0(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Si donc on envisage les surfaces $F = K$, où K est une constante, ce seront, si K est assez petit, des surfaces de genre 1 enveloppant la trajectoire fermée, et qui seront sans contact et positives si C_0 est négatif. sans contact et négatives si C_0 est positif.

Ainsi, si tous les C_0 ne sont pas nuls, on retombe sur le premier cas et il y a instabilité.

Le cas où tous les C_0 sont nuls semble d'abord très exceptionnel, puisque, pour le rencontrer, il faut remplir une infinité de conditions; il n'en est pas moins très important, non seulement à cause des difficultés spéciales qu'il présente, mais encore parce que c'est celui sur lequel on tombe en étudiant les équations générales de la Dynamique.

Nous avons à résoudre d'abord le problème suivant : comment pourra-t-on reconnaître *a priori* que tous les C_0 s'annulent à la fois, car on ne saurait se contenter de le vérifier, puisqu'il faudrait une infinité de vérifications. Voici, à cet égard, une règle simple.

S'il existe une fonction M qui soit holomorphe en x, y et t, et de plus réelle, positive et bien déterminée en tous les points de la trajectoire fermée; si, de plus, on a

$$(7) \qquad \frac{d(MX)}{dx} + \frac{d(MY)}{dy} + \frac{dM}{dt} = 0,$$

on est certain d'avance que tous les C_0 seront nuls.

Je vais démontrer en effet que, s'il en est ainsi, il ne peut y avoir de surface

$$F = K$$

de genre 1, enveloppant la trajectoire fermée, et de plus sans contact.

Considérons en effet un instant x, y et t comme représentant les trois coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace. Les points

qui satisferont aux conditions

$$F < K, \qquad 0 < t < 2\pi$$

rempliront un certain volume V, limité d'une part par une sorte de surface cylindrique $F = K$, et d'autre part par deux plans $t = 0$, $t = 2\pi$. Soit $d\omega$ un élément quelconque de la surface $F = K$.

Soit

$$\Sigma = \sqrt{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dt^2}}.$$

Le théorème de Green nous donnera

$$\int\int \frac{M}{\Sigma}\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dt}\right)d\omega + \int\int M\,dx\,dy - \int\int M\,dx\,dy$$
$$= \int\int\int\left[\frac{d(MX)}{dx} + \frac{d(MY)}{dy} + \frac{dM}{dt}\right]dx\,dy\,dt.$$

Dans le premier membre, la première intégrale est étendue à tous les éléments de la surface $F = K$, la deuxième à tous les éléments du plan $t = 0$, la troisième à tous les éléments du plan $t = 2\pi$; enfin l'intégrale du second membre est étendue à tous les éléments du volume V.

L'intégrale du second membre est nulle en vertu de la relation (7); les deuxième et troisième intégrales du premier membre se détruisent, puisque la fonction M reprend la même valeur quand t augmente de 2π.

La première intégrale devrait donc être nulle. Mais cela est impossible, puisque $\frac{M}{\Sigma}$ est toujours positif, et que $\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dt}$ est toujours de même signe.

Donc il ne peut pas y avoir de surface sans contact $F = K$.

Donc tous les C_0 sont nuls. C. Q. F. D.

Envisageons, en particulier, l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \ldots,$$

où les φ sont des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et

cosinus des multiples de t (nous ne supposons, pour le moment, qu'un seul argument), et qui a été étudiée par MM. Gyldén, Lindstedt et Callandreau. Nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = y = X, \qquad \frac{dy}{dt} = \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \ldots = Y,$$

qui est précisément la forme que nous étudions. On voit aisément que

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} = 0,$$

et par conséquent que tous les C_0 sont nuls.

Il résulte de là que, si l'on cherche à intégrer l'équation

$$X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dt} = 0$$

par approximations successives, en négligeant d'abord les puissances troisièmes de x et de y, puis les puissances quatrièmes, et ainsi de suite, il ne s'introduira jamais de terme séculaire. C'est là l'explication du succès de la méthode de M. Lindstedt; nous sommes maintenant en mesure de démontrer que cette méthode doit toujours réussir; M. Lindstedt n'avait pu établir cette proposition qu'en s'imposant des restrictions inutiles dont nous pouvons désormais nous affranchir.

Si tous les C_0 sont nuls, il existe une série

$$F = F_2 + F_3 + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de x et de y et suivant les sinus et cosinus des multiples de t, et satisfaisant formellement à l'équation

$$X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dt} = 0.$$

Si donc cette série est convergente, il existera une série de surfaces $F = K$ qui seront des surfaces fermées de genre 1, et sur lesquelles seront tracées les trajectoires.

Jusqu'ici, l'analogie avait été parfaite avec l'analyse du Chapitre XI,

mais elle va maintenant cesser. Dans le Chapitre XI, la série F était toujours convergente; il n'en sera plus de même ici; cela tient à ce que l'intégrale de l'équation

$$(6\ bis)\qquad \frac{d\varphi}{dt} - \lambda' \frac{d\varphi}{d\omega} = \psi = \Sigma A \cos(mt + n\omega + \theta)$$

s'écrit

$$\varphi = \sum \frac{A \sin(mt + n\omega + \theta)}{m - n\lambda'},$$

et que le diviseur $m - n\lambda'$ peut être très petit.

Il en résulte qu'il n'arrivera pas toujours que les trajectoires soient tracées sur une série de surfaces $F = K$. Pour mieux nous en rendre compte, nous allons prendre un exemple particulier.

Nous allons faire usage d'un système particulier de coordonnées. Posons, en effet,

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega.$$

Posons ensuite

$$\rho = \log\frac{(r-1)^2 + z}{r}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{z}{r-1} - \operatorname{arc\,tang}\frac{z}{r+1}.$$

A chaque système de valeurs de ρ, ω et φ correspondra un point M de l'espace, et un seul; ce point restera le même quand ω ou φ croîtra de 2π.

Les surfaces $\rho = \text{const.}$ sont des tores qui s'enveloppent mutuellement.

La surface $\rho = -\infty$ se réduit au cercle $r = 1$, $z = 0$; et si $\rho = -\infty$, la position du point M est indépendante de φ.

La surface $\rho = +\infty$ se réduit à l'axe des z, et si $\rho = +\infty$, la position du point M est indépendante de ω.

Les surfaces $\omega = \text{const.}$ sont des plans passant par l'axe des z. Les surfaces $\varphi = \text{const.}$ sont des sphères ayant leurs centres sur l'axe des z.

Cela posé, envisageons les équations différentielles

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \beta, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \Sigma A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi + \theta_{mn}) = \Theta.$$

Je supposerai que la série Θ est uniformément et absolument convergente pour toutes les valeurs de ω et de φ. D'ailleurs, m et n peuvent prendre toutes les valeurs entières positives et négatives.

L'intégrale générale de ces équations est

$$\omega = \alpha t + \omega_0, \qquad \varphi = \beta t + \varphi_0,$$

$$\rho = \rho_0 + \sum \frac{A_{mn}}{m\alpha + n\beta}[\sin(m\omega + n\varphi + \theta_{mn}) - \sin(m\omega_0 + n\varphi_0 + \theta_{mn})],$$

ω_0, φ_0 et ρ_0 étant des constantes d'intégration. Dans la dernière formule, nous supposerons implicitement compris le terme

$$A_{00}t.$$

Nous pourrons toujours supposer que l'origine du temps, celle des ω, et l'unité de longueur aient été choisies de telle sorte que

$$\omega_0 = \varphi_0 = \rho_0 = 0.$$

Pour simplifier les formules, je supposerai en outre que tous les θ_{mn} sont nuls, quitte à revenir plus tard sur le cas général. Il reste alors

$$\omega = \alpha t, \qquad \varphi = \beta t,$$

$$\rho = A_{00}t + \sum \frac{A_{m,n}}{m\alpha + n\beta}\sin(m\omega + n\varphi).$$

Plusieurs cas peuvent se présenter.

Premier cas. — Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est incommensurable, et A_{00} n'est pas nul.

Je dis qu'alors on pourra trouver une fonction $F(\omega, \varphi)$ développable en série trigonométrique et telle que la surface

$$\rho = F(\omega, \varphi)$$

soit une surface sans contact, c'est-à-dire que l'on ait

$$(8) \qquad \Theta \gtrless \alpha \frac{dF}{d\omega} + \beta \frac{dF}{d\varphi}$$

pour toutes les valeurs de ω et de φ.

Je pourrai écrire

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + A_{00},$$

Θ_1 ne comprenant qu'un nombre fini de termes de Θ, et Θ_2 étant aussi petit que l'on veut (cela est toujours possible, puisque la série Θ est absolument et uniformément convergente).

Je prendrai

$$|\Theta_2| < |A_{00}|.$$

Soit alors

$$\Theta_1 = \Sigma A_{pq} \cos(m\omega + n\varphi)$$

et

$$F = \sum \frac{A_{pq}}{p\alpha + q\beta} \sin(m\omega + n\varphi),$$

de sorte que

$$\alpha \frac{dF}{d\omega} + \beta \frac{dF}{d\varphi} = \Theta_1.$$

L'inégalité (8) devient alors

$$A_{00} + \Theta_2 + \Theta_1 \lessgtr \Theta$$

ou

$$A_{00} \gtrless -\Theta_2,$$

et elle est évidente, puisque la valeur absolue du premier membre est supérieure à celle du second.

Nous nous trouvons donc dans le cas déjà étudié des surfaces sans contact enveloppant la trajectoire fermée, et il y a instabilité.

Deuxième cas. — Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est commensurable, et A_{00} est nul.

Supposons, pour fixer les idées, que $\beta = 1$ et que α soit un nombre entier positif.

Il n'est plus avantageux dans ce cas-ci de supposer que les valeurs initiales ω_0, φ_0 et ρ_0 de ω, φ et ρ sont nulles.

Posons, pour abréger,

$$\mu = m\alpha + n\beta = m\alpha + n;$$

μ sera un nombre entier, et l'on retrouvera le même nombre μ pour une infinité de systèmes de valeurs de m et de n. On aura $\mu = 0$ si $n = -\alpha m$.

On trouve alors

$$\omega = \alpha t + \omega_0, \qquad \varphi = t + \varphi_0,$$

$$\rho = \rho_0 + t\Sigma A'_m \cos m(\omega_0 - \alpha\varphi_0)$$
$$+ \sum \frac{A_{mn}}{\mu}[\sin(\mu t + m\omega_0 + n\varphi_0) - \sin(m\omega_0 + n\varphi_0)],$$

où

$$A'_m = A_{mn} \quad \text{pour} \quad n = -\alpha m, \qquad \mu = 0.$$

Ici, comme le nombre μ est toujours entier, la série trigonométrique qui donne ρ est uniformément convergente.

Quant au coefficient de t,

$$\Sigma A'_m \cos m(\omega_0 - \alpha\varphi_0),$$

il peut être positif ou négatif selon les valeurs de ω_0 et de φ_0. Il en résulte que, selon la trajectoire choisie, ρ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand le temps t croît indéfiniment.

Il y a donc encore instabilité, puisque ρ ne reste pas fini, mais c'est une instabilité d'une nature toute différente de celle du premier cas; il est impossible, en effet, de construire une surface sans contact.

Le point mobile se rapproche asymptotiquement, soit de l'axe des z, soit du cercle $rz = 0$, $r = 1$, suivant la région où se trouve sa position initiale. Il y a même des trajectoires fermées qui correspondent au cas où

$$\Sigma A'_m \cos m(\omega_0 - \alpha\varphi_0) = 0.$$

Troisième cas. — Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est incommensurable, et A_{00} est nul.

Nous supposerons de nouveau

$$\omega_0 = \varphi_0 = \rho_0 = 0,$$

de sorte qu'on aura

$$\omega = \alpha t, \qquad \varphi = \beta t, \qquad \rho = \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t.$$

Il peut arriver alors que la série qui donne ρ soit uniformément convergente pour toutes les valeurs de t, c'est-à-dire que la série à termes positifs

$$(9) \qquad \sum \left| \frac{A_{mn}}{\mu} \right|$$

soit convergente. Alors la trajectoire se trouvera tout entière sur la surface

$$\rho = \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin(m\omega + n\varphi),$$

qui est de genre 1 et analogue à un tore. La forme des trajectoires sur cette surface est alors tout à fait semblable à celle qui a été étudiée au Chapitre XV.

Quatrième cas. — Nous ferons les mêmes hypothèses que dans le cas précédent, avec cette différence que la série

$$\sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t$$

convergera, mais non uniformément, de telle sorte que la série (9) soit divergente.

Cette hypothèse peut se réaliser. Supposons, par exemple,

$$\beta = 1, \qquad \alpha > 1, \qquad A_{mn} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|m|+|n|}.$$

Nous serons certains alors que la série

$$\Sigma A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi)$$

converge absolument et uniformément.

Réduisons maintenant α en fraction continue

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}$$

Soit $\frac{P_n}{Q_n}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de α; nous supposerons

$$\frac{P_n}{Q_n} > \alpha > \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Considérons la série

$$\sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t \tag{10}$$

le coefficient de $\sin(P_n - Q_n\alpha)t$ dans cette série sera

$$\frac{1}{2^{P_n+Q_n}} \frac{1}{P_n - Q_n\alpha}.$$

On aura

$$P_n - Q_n\alpha < \frac{1}{Q_{n+1}}$$

et

$$Q_{n+1} = Q_{n-1} + a_{n+1} Q_n > a_{n-1}.$$

Or je peux prendre arbitrairement les nombres a_n; je supposerai donc, par exemple,

$$a_{n+1} = H^{Q_n},$$

H étant un entier.

Le coefficient de $\sin(P_n - Q_n\alpha)t$ sera alors plus grand que

$$\frac{H^{Q_n}}{2^{P_n+Q_n}} = \left(\frac{H}{2^{\alpha+1}}\right)^{Q_n} \frac{1}{2^{P_n - Q_n\alpha}}.$$

Il est aisé de voir que si H est plus grand que $2^{\alpha+1}$, cette expression croît indéfiniment avec n. Les coefficients de la série (10) peuvent donc croître au delà de toute limite, et par conséquent cette série ne peut être uniformément convergente.

Plaçons-nous donc dans l'hypothèse où la convergence de cette série n'est pas uniforme.

J'appellerai *surface de genre* 1 *régulière* une surface continue qui satisfera à des conditions analogues à celles dites de Dirichlet (dans l'étude de la série de Fourier) et dont, par conséquent, l'équation pourra s'écrire

$$\rho = \Sigma B_{mn}(\cos m\omega + n\varphi) + \Sigma C_{mn} \sin(m\omega + n\varphi).$$

Il est impossible qu'une surface régulière soit sans contact.

Si, en effet, elle était par exemple positive, on devrait avoir en tous ses points

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} > 0$$

ou

$$\begin{aligned} H = {} & \Sigma A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi) \\ & + \Sigma B_{mn}(\alpha m + \beta n) \sin(m\omega + n\varphi) \\ & + \Sigma C_{mn}(\alpha m + \beta n) \cos(m\omega + n\varphi) > 0 \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi\, H > 0.$$

Or cette intégrale est nulle, car A_{00} est supposé nul.

Il ne peut pas arriver non plus qu'une trajectoire soit tout entière sur une surface régulière.

Car sur cette surface on devrait avoir

$$H = 0$$

et, par conséquent,

$$B_{mn} = 0, \qquad C_{mn} = \frac{A_{mn}}{\alpha m + \beta n}.$$

La série

$$\Sigma C_{mn} \sin(m\omega + n\varphi)$$

ne serait pas alors convergente.

Mais il y a plus, nous avons

$$\rho = \sum \frac{A_{mn}}{m\alpha + n\beta} \sin(m\alpha + n\beta)t.$$

La série du second membre, qui n'est pas uniformément convergente, peut devenir plus grande que toute quantité donnée, ainsi que je l'ai établi dans une Note insérée au *Bulletin astronomique*, t. I, p. 319.

Ainsi donc ρ peut croître indéfiniment, sans qu'il y ait de surface sans contact. Mais on peut se demander si ρ tend vers l'infini, c'est-

à-dire si l'on peut prendre t assez grand pour qu'à partir de l'époque t, ρ reste plus grand que toute quantité donnée, ou bien si la valeur de ρ va constamment en oscillant, de façon que l'amplitude des oscillations aille indéfiniment en croissant, et que les limites supérieure et inférieure atteintes dans ces oscillations tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. Dans ce dernier cas, ρ repassera une infinité de fois par une valeur quelconque.

Il est aisé de voir que les deux cas peuvent se présenter. Soit, en effet, D un entier positif non carré parfait; soient u et v deux entiers positifs tels que

$$u^2 - Dv^2 = 1.$$

Soit

$$(u - v\sqrt{D})^n = u_n - v_n\sqrt{D} = \lambda^n,$$

u_n et v_n étant entiers. Nous prendrons alors

$$\frac{d\rho}{dt} = \Theta = \Sigma(A\lambda)^n \cos(u_n\omega - v_n\varphi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \text{ad inf.})$$

et

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = 1, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \beta = \sqrt{D},$$

de sorte que

$$\rho = \Sigma A^n \sin\lambda^n t.$$

Si $|A| > 1$, $|A\lambda| < 1$, cette série est convergente sans l'être uniformément.

Si A est positif et suffisamment grand, tout en restant inférieur à $\frac{1}{\lambda}$, la valeur de ρ tend vers l'infini; si, au contraire, A est négatif et compris entre -1 et $-\frac{1}{\lambda}$, la valeur de ρ subit des oscillations indéfiniment croissantes.

Pour la démonstration, il faut se reporter à une Note que j'ai communiquée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 7 décembre 1885).

Ainsi deux cas peuvent se présenter : ou bien ρ varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et tout se passe alors comme si A_{00} n'était pas nul; ou bien ρ prend une infinité de fois toutes les valeurs possibles.

Nous aurons évidemment

$$|\Theta| < M,$$

M étant une quantité positive convenablement choisie. Nous aurons donc

$$\left|\frac{d\rho}{dt}\right| < M, \qquad |\rho| < |Mt|.$$

Cela posé, nous ferons $\alpha = 1$, de sorte que, à des intervalles de temps périodiques et égaux à 2π, ω reprenne les valeurs de $0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2n\pi, \ldots$, et que le point mobile se retrouve dans le plan $\omega = 0$; on aura d'ailleurs

$$\varphi = 2\beta n\pi.$$

Nous poserons

$$R(\varphi) = \varphi - 2m\pi,$$

m étant un entier choisi de telle sorte que $R(\varphi)$ soit compris entre 0 et 2π.

Si nous considérons le cercle C, qui a pour équations

$$\rho = 0, \qquad \omega = 0,$$

la position d'un point sur ce cercle sera déterminée par la valeur de $R(\varphi)$, puisque

$$R(\varphi + 2\pi) = R(\varphi).$$

Les équations de notre trajectoire nous donneront

$$\rho = \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t = \Phi(t).$$

Pour $t = 2n\pi$, $\omega \equiv 0 \pmod{2\pi}$, $\varphi = 2\beta n\pi$,

$$\rho = \Phi(2n\pi).$$

A chaque point du cercle C, pour lequel

$$R(\varphi) = (2\beta n - 2m)\pi \qquad (n \text{ et } m \text{ entiers}),$$

correspondra donc une valeur de ρ qui sera $\Phi(2n\pi)$. Considérons cette valeur de ρ comme une fonction du point considéré du cercle C, c'est-à-dire comme une fonction de $R(\varphi)$, et appelons-la

$$F[R(\varphi)].$$

Cette fonction sera discontinue et ne sera bien définie que pour les points

$$R(\varphi) = (2\beta n - 2m)\pi.$$

Je vais montrer d'abord que, sur un arc de cercle C, *si petit que soit cet arc,* il y a toujours des points pour lesquels notre fonction F est définie et a des valeurs aussi grandes qu'on le veut.

En effet, je vais envisager le point suivant, que j'appelle P,

$$\rho = 0, \qquad \omega = t, \qquad \varphi = \beta t.$$

Les valeurs de ω et de φ sont les mêmes pour notre point mobile et pour le point P. D'ailleurs, ce point reste constamment sur le tore $\rho = 0$.

Soit AB l'arc du cercle C que je considère. On voit sans peine que, si petit que soit cet arc, on peut trouver une quantité h assez grande pour jouir de la propriété suivante.

Soit t_0 une valeur quelconque de t, choisie arbitrairement. Pour une valeur de t comprise entre t_0 et $t_0 + h$, le point P viendra sur l'arc AB. En d'autres termes, l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du point P à travers l'arc AB est toujours plus petit que h.

Soit donc une valeur de t, pour laquelle

$$\rho = \Phi(t)$$

soit positif et très grand; appelons t_0 cette valeur de t. Nous avons vu plus haut qu'il en existe de telles.

Il existera une quantité k plus petite que h telle que le point P,

$$\rho = 0, \qquad \omega = t_0 + k, \qquad \varphi = \beta(t_0 + k),$$

soit situé sur l'arc AB. On aura alors

$$\Phi(t_0 + k) > \Phi(t_0) - Mk > \Phi(t_0) - Mh.$$

Comme $F(t_0)$ est positif et très grand, tandis que M et h sont finis, $F(t_0 + k)$ sera aussi positif et très grand. Au point du cercle C,

$$R(\varphi) = R(\beta t_0 + \beta k),$$

qui appartient à l'arc AB, la valeur de $F[R(\varphi)]$ est donc positive et très grande. C. Q. F. D.

On établirait de même que $F[R(\varphi)]$ peut devenir, sur l'arc AB, négatif et très grand; car $\Phi(t)$ peut devenir négatif et très grand, soit pour des valeurs positives, soit pour des valeurs négatives de t.

Soit maintenant

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n, \quad \ldots$$

une suite indéfinie de valeurs de φ, telles que

$$\lim R(\varphi_n) = A,$$
$$\lim F[R(\varphi_n)] = F_1.$$

Nous disons que F_1 est une des valeurs limites de la fonction F pour le point

$$R(\varphi) = A.$$

Supposons qu'aux deux points

$$R(\varphi) = A_0, \qquad R(\varphi) = A'_0$$

la fonction F soit bien définie et ait respectivement pour valeurs F_0 et F'_0. Je suppose, de plus, qu'au point $R(\varphi) = A_0$ elle admette la valeur limite F_1. Je dis qu'elle admettra au point $R(\varphi) = A'_0$ une valeur limite F'_1, et que cette valeur sera

$$F_1 - F_0 + F'_0.$$

En effet, d'après les hypothèses faites, il existera deux entiers, λ

et λ', tels que

$$R(2\beta\lambda\pi) = A_0, \qquad R(2\beta\lambda'\pi) = A'_0,$$
$$\Phi(2\lambda\pi) = F_0, \qquad \Phi(2\lambda'\pi) = F'_0,$$

et il existera en outre une série d'entiers

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_n, \quad \ldots$$

tels que

$$\lim R(2\beta\mu_n\pi) = A_0, \qquad \lim \Phi(2\mu_n\pi) = F_1.$$

Considérons la suite infinie d'entiers

$$\mu_1 + \lambda' - \lambda, \qquad \mu_2 + \lambda' - \lambda, \qquad \ldots, \qquad \mu_n + \lambda' - \lambda, \qquad \ldots,$$

et l'on aura évidemment

$$\lim R[2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)\beta] = A'_0.$$

Je dis que

$$\lim \Phi[2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)] = F'_1 = F_1 + F'_0 - F_0.$$

En effet, il vient

$$(11) \qquad \Phi[2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)] - \Phi(2\pi\mu_n) = \int_{2\pi\mu_n}^{2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)} \frac{d\Phi}{dt}\, dt.$$

Or, si l'on tient compte de la double condition

$$\lim R(2\beta\mu_n\pi) = R(2\beta\lambda\pi),$$
$$\lim R[2\beta(\mu_n + \lambda' - \lambda)\pi] = R(2\beta\lambda'\pi),$$

il viendra, pour la limite du second membre de (11),

$$\int_{2\pi\lambda}^{2\pi'} \frac{d\Phi}{dt}\, dt = F'_0 - F_0$$

et, pour celle du premier,

$$F'_1 - F_1.$$

Il reste donc

$$F'_1 = F_1 + F'_0 - F_0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La fonction $F[R(\varphi)]$ était uniforme, mais n'était définie qu'en des points particuliers du cercle C. La fonction $F_1[R(\varphi)]$, qui représentera désormais une quelconque des valeurs limites de la fonction F dans le voisinage du point $R(\varphi)$, sera au contraire définie pour tous les points du cercle C, mais elle ne sera plus uniforme.

Soit maintenant

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad \ldots$$

une suite indéfinie de points du cercle C, ayant pour limite le point B.

Soit

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_n, \quad \ldots$$

une suite de valeurs limites de la fonction F correspondant respectivement aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Soit

$$\lim F_n = G.$$

Je dis que G sera une des valeurs limites de la fonction F au point B.

En effet, il résulte des hypothèses faites que l'on peut trouver une infinité de points A_n tels que leur distance au point B et la différence $G - F_n$ soient aussi petites qu'on le veut; et de plus que dans le voisinage de chacun de ces points A_n on peut trouver une infinité de points M, tels que leur distance au point A_n et la différence $F_n - F(M)$ soient aussi petites qu'on le veut. Il résulte de là que la limite du point M est le point B et que G est la limite de F(M), si bien que G est une des valeurs de la fonction $F_1(B)$ définie plus haut. C. Q. F. D.

Je dis maintenant que si en un point M la fonction $F[B(\varphi)]$ prend la valeur F_0 et si, en même temps, F_1 est une valeur limite de cette fonction F au même point M, $2F_1 - F_0$ sera également une valeur limite.

En effet, nous avons une suite infinie de points

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad \ldots$$

où la fonction F a respectivement les valeurs

$$F(A_1), \quad F(A_2), \quad \ldots, \quad F(A_n), \quad \ldots.$$

et d'après les hypothèses faites, la distance $A_n M$ tend vers o et $F(A_n)$ vers F_1 quand n croît indéfiniment. D'après un résultat démontré plus haut, une des valeurs limites de la fonction F au point A_n sera

$$F_1 + F(A_n) - F(M) = F_1 - F_0 + F(A_n);$$

quand n croîtra au delà de toute limite, le point A_n viendra en M et $F(A_n)$ se réduira à F_1; donc $2F_1 - F_0$ sera une valeur limite de la fonction F au point M.

Ainsi, si nous considérons la fonction $F_1[R(\varphi)]$ définie plus haut, il pourra se présenter les cas suivants :

1° Ou bien la fonction F_1 ne pourra prendre que les valeurs $\pm\infty$;

2° Ou bien la fonction F_1 prendra seulement au point M les valeurs $\pm\infty$ et $F(M)$;

3° Ou bien la fonction F_1 prendra en chaque point M toutes les valeurs possibles et sera non seulement non uniforme, mais complètement indéterminée;

4° Ou bien la fonction F_1 prendra au point M une infinité de valeurs différant les unes des autres par une période constante. Ce sera, en d'autres termes, une fonction périodique analogue à l'arc sinus.

La première de ces hypothèses peut certainement se réaliser [car nous avons vu plus haut qu'il peut arriver que la fonction $\Phi(t)$, tendant vers l'infini, ne reprenne une valeur donnée qu'un nombre fini de fois].

J'ai tout lieu de croire qu'il en est de même de la troisième; mais qu'au contraire la quatrième ne se réalisera jamais. Mais ce qui précède suffit pour donner une idée de la grande variété des cas qui peuvent se présenter.

1° Il peut arriver que ρ ne puisse prendre une valeur donnée qu'un nombre fini de fois et tende vers $\pm\infty$ quand le temps croît indéfiniment [si A_{00} n'est pas nul, ou bien encore si A_{00} est nul, mais que $\frac{\alpha}{\beta}$ soit commensurable; ou bien encore, quoique A_{00} soit nul et que $\frac{\alpha}{\beta}$ soit incommensurable, si la série $\Phi(t)$ n'est pas uniformément convergente et si elle tend vers l'infini].

2° Mais il peut arriver encore que ρ oscille constamment entre certaines limites, de façon à reprendre une infinité de fois toutes les va-

leurs comprises entre ces limites $\left[\text{si } A_{00} \text{ est nul, } \frac{\alpha}{\beta} \text{ incommensurable et la série } \Phi(t) \text{ uniformément convergente}\right]$.

3° Enfin il peut arriver que ρ reprenne une infinité de fois toutes les valeurs possibles $\left[\text{si } A_{00} \text{ est nul, } \frac{\alpha}{\beta} \text{ incommensurable et si la série } \Phi(t) \text{ ne converge pas uniformément et ne tend pas vers l'infini}\right]$.

Dans le premier cas, le point mobile, ou bien va constamment en s'éloignant de la trajectoire fermée $\rho = -\infty$ (si ρ tend vers $+\infty$), ou bien s'en rapproche asymptotiquement (si ρ tend vers $-\infty$). Il peut même arriver que certaines trajectoires s'éloignent constamment de la trajectoire fermée pendant que d'autres s'en rapprochent asymptotiquement $\left(\text{si } A_{00} \text{ est nul, et } \frac{\alpha}{\beta} \text{ commensurable}\right)$.

Dans tous les cas, il y a instabilité, c'est-à-dire que, si le point mobile à l'époque $t = 0$ se trouve très voisin de la trajectoire fermée, ou bien il n'en sera plus très voisin pour des valeurs très grandes et positives de t; ou bien il n'en était pas très voisin pour des valeurs très grandes et négatives de t.

Dans le second cas, au contraire, il y a stabilité, c'est-à-dire que si le point mobile est à l'époque $t = 0$ très voisin de la trajectoire fermée, il en reste constamment très voisin pour toutes les valeurs positives ou négatives de t.

Enfin, dans le troisième cas, il y a instabilité en ce sens que si le point mobile est, à l'origine des temps, très voisin de la trajectoire fermée, il pourra, à certaines époques, s'en éloigner beaucoup. Mais il y a stabilité, au contraire, en ce sens que le point mobile, après s'être éloigné beaucoup de la trajectoire fermée, s'en rapprochera de nouveau beaucoup et en redeviendra, à certaines époques, extrêmement voisin.

L'exemple simple que nous venons de longuement étudier nous permet maintenant de revenir sur le cas général et de dire :

De ce que tous les C_0 sont nuls, il n'est pas permis de conclure que la série

$$F = F_2 + F_3 + \ldots,$$

définie plus haut, soit convergente ni qu'un point très voisin de la

trajectoire, fermée en restera toujours très voisin ni, même qu'après s'être éloigné de cette trajectoire il s'en rapprochera de nouveau.

Il peut arriver, ou bien qu'un point très voisin de la trajectoire fermée en reste très voisin, ou bien qu'il s'en éloigne une infinité de fois pour en redevenir une infinité de fois très voisin, ou bien enfin qu'après s'en être éloigné il en demeure très éloigné. Ces trois cas, logiquement possibles, peuvent effectivement se rencontrer.

D'après ce qui précède, on comprendra sans peine à quel point les difficultés que l'on rencontre en Mécanique céleste, par suite des petits diviseurs et de la quasi-commensurabilité des moyens mouvements, tiennent à la nature même des choses et ne peuvent être tournées. Il est extrêmement probable qu'on les retrouvera, quelle que soit la méthode que l'on emploie.

Paris, 13 décembre 1885.

Propositions arithmétiques tirées de la théorie de la fonction exponentielle;

Par M. LIPSCHITZ.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

En étudiant vos recherches sur la fonction exponentielle, par lesquelles vous avez dévoilé une liaison inattendue entre l'Analyse et l'Arithmétique, recherches appliquées si heureusement par M. *Lindemann* (¹), et traitées de nouveau dans un Mémoire récent de M. *Weierstrass* (²), je me suis demandé si les procédés caractéristiques qui y sont mis en jeu ne permettent pas de parvenir à des résultats arithmétiques, dans lesquels les fonctions transcendantes sont disparues. Cette voie prise, j'ai réussi à trouver un ensemble de théorèmes, qui se réfèrent à toutes les équations dont les coefficients sont des nombres entiers. Or veuillez me permettre de vous en informer.

1. Dans le cas le plus simple d'une équation quadratique pure, je m'appuie sur le développement en fraction continue, qui a été également le point de départ de votre travail, et qui, pour une variable quelconque z, s'exprime ainsi

$$(1)\qquad \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = \cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\ldots}}}$$

(¹) *Sitzungsbericht* de l'Académie de Berlin, du 22 juin 1882.

(²) *Sitzungsbericht* de l'Académie de Berlin, du 22 octobre 1885.

Aux fractions d'approximations successives

$$\frac{z}{1},\quad \frac{3z}{3+z^2},\quad \frac{15z+z^3}{15+6z^2},\quad \ldots$$

correspondent les fonctions entières de z

$$(2)\qquad \begin{cases} K_0(z) = 1, \\ K_1(z) = 1 + z, \\ K_2(z) = 3 + 3z + z^2, \\ K_3(z) = 15 + 15z + 6z^2 + z^3, \end{cases}$$

qui sont déterminées dès l'indice $m = 2$ par la relation récurrente

$$(3)\qquad K_m(z) = (2m-1)K_{m-1}(z) + z^2 K_{m-2}(z),$$

de sorte que lesdites fractions naissent de l'expression

$$\frac{K_m(z) - K_m(-z)}{K_m(z) + K_m(-z)},$$

en faisant $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Cela étant, pour les racines de l'équation

$$z^2 - D = 0,$$

où D désigne un nombre entier positif non carré ou négatif quelconque, il est établi que le module de la différence

$$(4)\qquad K_m(\sqrt{D})e^{-\sqrt{D}} - K_m(-\sqrt{D})e^{\sqrt{D}},$$

si l'on assigne au nombre m une valeur assez grande, peut être fait plus petit qu'une quantité δ donnée aussi petite que l'on voudra.

Supposons, en premier lieu, que D soit positif et non carré, et dénotons par $\sqrt{D}$ la racine positive.

Comme les coefficients de la fonction $K_m(z)$ sont des nombres entiers, on a

$$(5)\qquad K_m(\sqrt{D}) = t_0 + \sqrt{D}\,t_1, \qquad K_m(-\sqrt{D}) = t_0 - \sqrt{D}\,t_1.$$

où t_0 et t_1 sont des nombres entiers. Alors t_0 et t_1 sont des nombres positifs, la quantité $t_0 + \sqrt{D}\,t_1$ est pareillement positive, la quantité $t_0 - \sqrt{D}\,t_1$ ne peut pas s'évanouir.

Partant, le produit des deux expressions

$$t_0^2 - D\,t_1^2 = M \tag{6}$$

a une valeur entière, qui diffère nécessairement de zéro. Mais parce que l'équation (6) entraîne

$$\left[K_m(\sqrt{D})e^{-\sqrt{D}}\right]\left[K_m(-\sqrt{D})e^{\sqrt{D}}\right] = M,$$

et que ces deux facteurs, pour une valeur convenable de m, diffèrent entre eux aussi peu que l'on voudra, la quantité correspondante M doit être positive, et chacun des deux facteurs, dont le premier est certainement positif, ne peut différer de la racine carrée positive $\sqrt{M}$ que d'une quantité arbitrairement petite. Donc, si l'on divise la différence (4) par l'expression $K_m(-\sqrt{D})e^{-\sqrt{D}}$, la valeur absolue du quotient

$$\frac{K_m(\sqrt{D})}{K_m(-\sqrt{D})} - e^{2\sqrt{D}} \tag{7}$$

peut également être abaissée à volonté par le choix du nombre m. Par conséquent, si nous introduisons au lieu de la fonction exponentielle la fonction inverse, ce fait se change dans le résultat, que le logarithme naturel

$$\log \frac{K_m(\sqrt{D})}{K_m(-\sqrt{D})} \tag{8}$$

pour une valeur assez grande de m sera rapproché de la valeur $2\sqrt{D}$ aussi près que l'on voudra.

C'est le logarithme naturel de ladite fraction, qui sert à la solution d'une question arithmétique, que nous attacherons comme d'usage à la Géométrie. Désignons par x_0, x_1 les coordonnées rectilignes d'un point dans un plan, et considérons l'hyperbole représentée par l'équa-

tion

$$x_0^2 - Dx_1^2 = M. \tag{9}$$

Ensuite mesurons l'aire d'un secteur, dont deux côtés sont les lignes droites, tirées du centre de l'hyperbole jusqu'aux deux points t_0, t_1, et t_0, $-t_1$ et dont le troisième côté est l'arc de l'hyperbole compris entre ces deux points. On trouve facilement l'expression

$$\frac{M}{2\sqrt{D}} \log \frac{t_0 + \sqrt{D}\, t_1}{t_0 - \sqrt{D}\, t_1}, \tag{10}$$

dont la comparaison à (8) fait voir que, sous les suppositions faites, la valeur de (10) se rapproche de la valeur M. Les valeurs

$$x_0 = \sqrt{M}, \qquad x_1 = 0,$$

correspondant au sommet de la branche choisie de l'hyperbole, le nombre M détermine l'aire d'un triangle, dont deux côtés sont les lignes droites tirées du centre de l'hyperbole sous des angles égaux au demi d'un angle droit vers l'axe, et dont le troisième côté est la tangente à l'hyperbole, prise dans ledit sommet. D'ailleurs il est évident que l'aire d'une partie d'un plan, dont les dimensions vont toujours en croissant, donne une expression approchée du nombre des points à coefficients entiers qui sont contenus dans la partie en question. Pour en faire une application dans notre cas, il faut nous assurer que le nombre M reçoit successivement des valeurs de plus en plus grandes. A cet effet, supposons le contraire, que le nombre M ne surpasse jamais une certaine quantité L.

Admettons que le nombre m, qui est choisi d'abord assez grand, étant changé dans un nombre plus grand m', au lieu des nombres t_0, t_1, M, on obtienne respectivement t'_0, t'_1, M', mais que l'on ait en même temps M' = M. De là il suit que les expressions

$$\frac{t_0 + \sqrt{D}\, t_1}{\sqrt{M}}\, e^{-\sqrt{D}}, \qquad \frac{t_0 - \sqrt{D}\, t_1}{\sqrt{M}}\, e^{\sqrt{D}},$$

$$\frac{t'_0 + \sqrt{D}\, t'_1}{\sqrt{M}}\, e^{-\sqrt{D}}, \qquad \frac{t'_0 - \sqrt{D}\, t'_1}{\sqrt{M}}\, e^{\sqrt{D}}$$

se rapprochent de l'unité. Par conséquent les différences

$$\frac{t_0 - t'_0}{\sqrt{M}} e^{-\sqrt{D}}, \qquad \frac{t_1 - t'_1}{\sqrt{M}} e^{\sqrt{D}},$$

deviendraient numériquement aussi petites que l'on voudra, ce qui ne peut pas arriver, vu que le nombre M n'est jamais supérieur à L, sans que l'on ait pour les nombres entiers respectifs

$$t_0 - t'_0 = 0, \qquad t_1 - t'_1 = 0.$$

Il faudrait donc que les deux systèmes t_0, t_1 et t'_0, t'_1 fussent identiques. De l'autre côté, parce que la valeur de la différence (4) peut être abaissée sans limite, il est clair que, cette différence étant d'une certaine petitesse pour la valeur m, on pourrait arriver à une petitesse supérieure par le choix du nombre m', ce qui est incompatible avec les équations $t_0 - t'_0 = 0$, $t_1 - t'_1 = 0$, qui suivent de la supposition $M' = M$. Il faut donc que le nombre M' obtienne un nombre illimité de valeurs, différentes de M et différentes entre elles; par conséquent il croît nécessairement au delà de toute grandeur donnée. Cela étant, la proposition se trouve justifiée, que le rapport des points à coefficients entiers, qui sont situés dans les deux aires définies, se rapprochent de l'unité d'autant plus que le nombre m croît. Voilà un énoncé arithmétique, dans lequel n'entre aucune fonction transcendante.

2. Maintenant discutons le cas où D est égal à un nombre entier négatif quelconque $-\Delta$, et remplaçons $\sqrt{D}$ par la valeur imaginaire $i\sqrt{\Delta}$, la racine $\sqrt{\Delta}$ étant positive. Par conséquent, les expressions

$$(11) \quad K_m(i\sqrt{\Delta}) = \varepsilon(t_0 + i\sqrt{\Delta}t_1), \qquad K_m(-i\sqrt{\Delta}) = \varepsilon(t_0 - i\sqrt{\Delta}t_1),$$

où ε désigne une unité positive ou négative qui sera déterminée plus tard, ne sont pas susceptibles de s'évanouir, à moins que les deux nombres t_0 et t_1 soient égaux à zéro. Pour être convaincu que cela ne peut pas arriver non plus, il suffit d'avoir recours à la série connue d'équations

$$(12) \quad K_{m-1}(-z)K_m(z) - K_{m-1}(z)K_m(-z) = (-1)^{m-1}2z^{2m-1};$$

elles font voir que $K_m(z)$ et $K_m(-z)$ ne deviennent jamais égaux à zéro en même temps pour une valeur de z, qui diffère de zéro. Il est donc prouvé que le produit

$$t_0^2 + \Delta t_1^2 = M \tag{13}$$

donne un nombre entier positif M différent de zéro. Parce que les deux termes de la différence

$$K_m(i\sqrt{\Delta})e^{-i\sqrt{\Delta}} - K_m(-i\sqrt{\Delta})e^{i\sqrt{\Delta}} \tag{14}$$

sont conjugués, la propriété de son module, d'avoir zéro pour limite, entraîne que chaque terme se rapproche de la même quantité réelle; suivant qu'elle est positive ou négative, nous supposerons l'unité marquée par ε égale à $+1$ ou à -1, de sorte que les expressions

$$(t_0 + i\sqrt{\Delta}t_1)e^{-i\sqrt{\Delta}}, \qquad (t_0 - i\sqrt{\Delta}t_1)e^{i\sqrt{\Delta}}$$

convergeront vers une limite positive. En même temps, l'équation

$$\left[(t_0 + i\sqrt{\Delta}t_1)e^{-i\sqrt{\Delta}}\right]\left[(t_0 - i\sqrt{\Delta}t_1)e^{i\sqrt{\Delta}}\right] = M \tag{15}$$

fait voir que ladite quantité réelle positive coïncide avec la racine positive $\sqrt{M}$. Par conséquent, la différence (14), divisée par

$$K_m(-i\sqrt{\Delta})e^{-i\sqrt{\Delta}},$$

c'est-à-dire la quantité

$$\frac{t_0 + i\sqrt{\Delta}t_1}{t_0 - i\sqrt{\Delta}t_1} - e^{2i\sqrt{\Delta}} \tag{16}$$

a un module qui, pour une valeur assez grande de m, diffère de zéro d'une quantité petite donnée arbitrairement. En y appliquant, au lieu de la fonction exponentielle, le logarithme naturel qui, ici, n'est autre chose qu'une fonction inverse trigonométrique, on conclut que l'expression

$$\log\frac{t_0 + i\sqrt{\Delta}t_1}{t_0 - i\sqrt{\Delta}t_1} \tag{17}$$

approche aussi près que l'on voudra de la quantité imaginaire $2i\sqrt{\Delta}$.

Si nous désignons par $E\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right) = l$ *le nombre entier le plus grand contenu dans la fraction* $\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}$, le logarithme naturel en question est complètement déterminé par la condition d'être compris entre les quantités imaginaires $2li\pi$ et $2(l+1)i\pi$. On a donc pour $\Delta = 5$, $l = 0$, pour $\Delta = 11$, $l = 1$, pour $\Delta = 57$, $l = 2$. D'ailleurs il est clair que, puisque le nombre entier l s'obtient en divisant la quantité algébrique $\sqrt{\Delta}$ par π, cette quantité transcendante π constitue, pour ainsi dire, un élément nécessaire et inévitable dans nos recherches.

Pour arriver à l'énoncé d'un théorème d'Arithmétique, nous nous servirons de l'équation de l'ellipse

$$x_0^2 + \Delta x_1^2 = M. \tag{18}$$

Menons du centre de l'ellipse un rayon vecteur vers le sommet $x_0 = \sqrt{M}$, $x_1 = 0$, faisons marcher le point final sur l'ellipse dans un sens tel que x_1 commence à se mouvoir en croissant, et arrêtons-le au point $x_0 = t_0$, $x_1 = t_1$, après un nombre de demi-révolutions complètes, que nous avons déterminé antérieurement et désigné par $E\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right) = l$. Ensuite exécutons un mouvement pareil qui commence également au sommet $x_0 = \sqrt{M}$, $x_1 = 0$, mais qui procède dans le sens inverse jusqu'à ce qu'il ait atteint, d'après le même nombre l de demi-révolutions complètes, le point $x_0 = t_0$, $x_1 = -t_1$. Alors l'aire décrite par le mouvement total du rayon vecteur sera mesurée par l'expression

$$\frac{M}{2i\sqrt{\Delta}} \log \frac{t_0 + i\sqrt{\Delta}\, t_1}{t_0 - i\sqrt{\Delta}\, t_1}, \tag{19}$$

où la signification du logarithme naturel est exactement celle usitée en (17). Par contre, si nous tirons, comme dans le cas de l'hyperbole, du centre de l'ellipse, sous des angles égaux au demi d'un angle droit, vers l'axe, des lignes droites, ces lignes formeront, avec la tangente prise au sommet respectif de l'ellipse, un triangle dont l'aire est égale au nombre M. Or on démontre pareillement, comme auparavant, que le nombre M, pour les valeurs croissantes de m, doit surpasser toute

limite. Donc on a, par un raisonnement semblable, le théorème que le rapport des deux nombres qui représentent le nombre des points à coefficients entiers contenus dans les deux aires définies, se rapproche de l'unité, pour une valeur de m assez grande, aussi près que l'on voudra. Il me semble bien remarquable que, dans le théorème actuel, il s'agit d'un groupe de points à coefficients entiers qui se trouvent dans une aire limitée par deux lignes droites et par un arc de l'ellipse, mais tellement définie que par cette aire l'intérieur de l'ellipse sera couvert plusieurs fois dans tous les cas où le nombre $E\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right) = l$ surpasse la valeur zéro. On se voit donc, par des considérations arithmétiques, conduit à une conception pareille à celle qui a été introduite dans l'Analyse par Riemann.

3. Afin d'étendre notre considération à une équation quelconque, nous ferons usage des significations introduites par M. Weierstrass dans le Mémoire cité. Soit $f(z)$ une fonction entière de z du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré à coefficients entiers, dont le premier a_0 est positif,

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_{n+1}. \tag{20}$$

Admettons que l'équation

$$f(z) = 0$$

soit irréductible, d'où suit que $f(z)$ ne peut pas avoir un diviseur commun avec sa première dérivée $f'(z)$, et par conséquent que les $(n+1)$ racines de ladite équation

$$z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_n \tag{21}$$

diffèrent entre elles. Or on obtient, pour une valeur quelconque du nombre m, un système de $(n+1)$ fonctions

$$g_0(z, m), \quad g_1(z, m), \quad \ldots, \quad g_n(z, m) \tag{22}$$

qui jouissent des propriétés suivantes. Chacune d'elles est une fonction de z d'un degré qui n'est pas supérieur à n, les coefficients étant des nombres entiers; pour tous les couples de deux racines z_α, z_β, et pour un indice quelconque fixe ν, le module de la différence

$$g_\nu(z_\alpha, m)e^{-z_\alpha} - g_\nu(z_\beta, m)e^{-z_\beta} \tag{23}$$

peut être réduit de telle sorte qu'il tombe au-dessous d'une quantité δ donnée aussi petite que l'on voudra pour une valeur de m assez grande, tandis que le déterminant

$$(24) \qquad | \, g_\nu(z_\alpha, m) \, |$$

a toujours une valeur différente de zéro.

Vis-à-vis de cet ensemble de propriétés, faisons remarquer que l'irréductibilité de l'équation $f(z) = 0$ fait qu'aucune des fonctions du $n^{\text{ième}}$ degré $g_\nu(z, m)$ ne peut s'évanouir par la substitution d'une racine quelconque $z = z_\alpha$ sans que tous les coefficients entiers soient égaux à zéro. Mais il est également impossible que cela advienne; car, s'il en était ainsi, toutes les $(n+1)$ expressions qui naissent de la fonction $g_\nu(z, m)$, en posant $z = z_0, z_1, \ldots, z_n$, seraient égales à zéro. Cela entraînerait l'évanouissement du déterminant, qui ne s'annule jamais; donc notre assertion se trouve constatée. De là suit directement que le produit des $(n+1)$ facteurs

$$(25) \qquad \prod_{\alpha=0}^{\alpha=n} g_\nu(z_\alpha, m)$$

a toujours une valeur différente de zéro. Cette valeur est nécessairement égale à un nombre rationnel, et l'on conclut facilement d'une propriété connue de la résultante de deux fonctions algébriques entières que ce nombre, multiplié par la puissance a_0^n du coefficient entier a_0 de z^{n+1} dans (20), devient un nombre entier.

D'ailleurs on observe que dans (23) l'expression $g_\nu(z_\alpha, m)e^{-z_\alpha}$ pour une racine réelle z_α est réelle, et que pour deux racines complexes et conjuguées z_α et z_β les deux expressions correspondantes sont pareillement conjuguées. Donc la propriété indiquée de la différence (23) entraîne cette conséquence, que les expressions $g_\nu(z_\alpha, m)e^{-z_\alpha}$ pour toutes les racines z_α et pour une valeur de m assez grande ne peuvent différer d'une quantité réelle que d'une quantité dont le module est d'une petitesse arbitraire. Or le produit des $(n+1)$ expressions mentionnées a la valeur

$$(26) \qquad \prod_{\alpha=0}^{\alpha=n} g_\nu(z_\alpha, m)e^{-(z_0+z_1+\cdots+z_n)},$$

où le premier facteur coïncide avec le produit (25), qui est égal à un nombre entier, différent de zéro, divisé par la puissance a_0^n. Donc la quantité réelle, vers laquelle convergeront toutes les expressions $g_\nu(z_\alpha, m)e^{-z_\alpha}$ où $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n$, ne peut être jamais numériquement inférieure à la racine $(n+1)^{\text{ième}}$ de la valeur $\frac{1}{a_0^n} e^{-(z_0+z_1+\ldots+z_n)}$.

Maintenant désignons par ε l'unité positive ou négative selon que la quantité indiquée est positive ou négative; posons

$$(27) \qquad \varepsilon g_\nu(z_\alpha, m) = l_0 + z_\alpha l_1 + z_\alpha^2 l_2 + \ldots + z_\alpha^n l_n,$$

où $l_0, l_1, \ldots, l_n$ sont des nombres entiers, et formons *la norme de l'expression* (27)

$$(28) \qquad \prod_{\alpha=0}^{\alpha=n} (l_0 + z_\alpha l_1 + z_\alpha^2 l_2 + \ldots + z_\alpha^n l_n) = \frac{M}{a_0^n};$$

alors M sera un nombre entier positif. Il est donc clair que l'expression

$$(29) \qquad (l_0 + z_\alpha l_1 + \ldots + z_\alpha^n l_n)e^{-z_\alpha}$$

diffère aussi peu que l'on choisira de la racine positive $(n+1)^{\text{ième}}$ de la quantité

$$\frac{M}{a_0^n} e^{-(z_0+z_1+\ldots+z_n)},$$

que l'on peut exprimer, $z_0 + z_1 + \ldots + z_n$ étant égal à la fraction $\frac{a_1}{a_0}$, comme il suit

$$(30) \qquad \sqrt[n+1]{\frac{M}{a_0^n}}\, e^{-\frac{a_1}{(n+1)a_0}}.$$

Partant, l'expression

$$(31) \qquad \frac{l_0 + z_\alpha l_1 + \ldots + z_\alpha^n l_n}{\sqrt[n+1]{\frac{M}{a_0^n}}}\, e^{-\left[z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}\right]}$$

pour chaque indice α viendra aussi près que l'on voudra de l'unité.

Les combinaisons $z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}$, qui entrent ici comme des arguments de la fonction exponentielle, sont les racines de l'équation, dans laquelle s'échange notre équation par une substitution qui dans la fonction respective résultante fait égal à zéro le coefficient de la puissance $n^{\text{ième}}$ de la nouvelle variable. En appliquant l'interprétation usuelle des quantités imaginaires, évidemment le point $\frac{a_1}{(n+1)a_0}$ est le centre de gravité des points correspondant aux racines $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Par suite la différence $z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}$ exprime la position de la racine z_α par rapport au centre de gravité commun de toutes les racines.

Si, dans l'expression (31), nous passons de la fonction exponentielle au logarithme naturel, nous obtenons le résultat, que l'expression

$$(32) \qquad \log(t_0 + z_\alpha t_1 + \ldots + z_\alpha^n t_n) - \frac{1}{n+1}\log\frac{M}{a_0^n}$$

diffère pour une valeur convenable de m, assez peu de la différence

$$(33) \qquad z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}.$$

Pour les valeurs réelles z_α l'argument du logarithme est réel; pour les valeurs complexes z_α la signification du logarithme est déterminée par la nature de la relation actuelle et donne lieu à des considérations pareilles à celles qui sont exposées dans le n° 2.

Enfin, il importe de prouver que, l'indice ν étant fixé, les nombres entiers positifs, désignés par M, doivent croître au delà de toute limite pour des valeurs croissantes de m. Voyons ce qui suit de l'hypothèse que le nombre M ne soit jamais supérieur à une certaine quantité L. Supposons que dans l'expression (31) pour une valeur m', plus grande que la valeur assez grande m, les nombres $t_0, t_1, \ldots, t_n$, M acquièrent respectivement les valeurs $t'_0, t'_1, \ldots, t'_n$, M′, mais que le nombre M′ soit égal à M. Par conséquent l'expression

$$\frac{t'_0 + z_\alpha t'_1 + \ldots + z_\alpha^n t'_n}{\sqrt[n+1]{\frac{M}{a_0^n}}}\, e^{-\left[z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}\right]}$$

sera rapprochée de l'unité à volonté. Donc le module de la différence

$$(34)\qquad \frac{(t_0 - t'_0) + z_\alpha(t_1 - t'_1) + \ldots + z_\alpha^n(t_n - t'_n)}{\sqrt[n+1]{\frac{M}{a_0^n}}},$$

le facteur $e^{-\left[z_\alpha - \frac{a_1}{(n+1)a_0}\right]}$ étant omis, différera également de zéro d'une quantité arbitrairement petite, pour chaque indice α. Mais parce que le déterminant

$$(35)\qquad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \ldots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^n \\ . & .. & .. & \ldots & .. \\ . & .. & .. & \ldots & .. \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^n \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire le produit

$$(36)\qquad \mathfrak{D} = \Pi(z_\alpha - z_\beta),$$

pris par rapport à tous les couples d'indices différents α et β, est par notre hypothèse différent de zéro, on peut déduire de (34), en multipliant par des facteurs convenables et en faisant addition, $n+1$ expressions

$$\frac{\mathfrak{D}(t_\gamma - t'_\gamma)}{\sqrt[n+1]{\frac{M}{a_0^n}}},$$

où $\gamma = 0, 1, 2, \ldots, n$, dont les modules sont nécessairement aussi petits que l'on voudra. Mais parce que t_γ et t'_γ sont des nombres entiers, et que M ne surpasse jamais la quantité L, cela entraîne les $n+1$ équations exactes

$$(37)\qquad t_\gamma - t'_\gamma = 0.$$

Dès que ces équations sont dérivées de la supposition $M' = M$, et que le procédé, par lequel sont engendrés les nombres $t_0, t_1, \ldots, t_n$, si l'on remplace le nombre m par un nombre plus grand m' convenable, conduit à un système de nombres $t'_0, t'_1, \ldots, t'_n$, pour lequel les modules des différences (23) sont plus approchés de zéro, il est impossible que

les $(n+1)$ équations (37) subsistent en même temps. Partant, le nombre correspondant M′ ne peut pas coïncider avec le nombre M antérieurement déterminé. Donc, parce que le nombre des entiers positifs, moindres que L, est fini et que le procédé en question peut être répété à l'infini, le nombre M′ doit croître au delà de toute mesure, ce qu'il fallait démontrer.

4. Les réflexions arithmétiques, que nous allons aborder maintenant, demandent la distinction entre les racines réelles et complexes conjuguées de l'équation $f(z)=0$. S'il y a le nombre p de la première, $2q$ de la seconde sorte, nous désignerons les racines réelles par

$$z_\lambda = z_0, z_1, \quad \ldots, \quad z_{p-1},$$

les racines complexes par

$$\begin{aligned} z_\mu &= z_p, \quad z_{p+1}, \quad \ldots, \quad z_{p+q-1}, \\ z_{\mu+q} &= z_{p+q}, z_{p+q+1}, \quad \ldots, \quad z_{p+2q-1}, \end{aligned}$$

où z_μ et $z_{\mu+q}$ sont conjugués, et la partie imaginaire de z_μ, divisée par i, est positive. Alors on a les équations

$$(38) \qquad \begin{cases} t_0 + z_\lambda t_1 + \ldots + z_\lambda^n t_n = u_\lambda, \\ t_0 + z_\mu t_1 + \ldots + z_\mu^n t_n = u_\mu + i u_{\mu+q}, \\ t_0 + z_{\mu+q} t_1 + \ldots + z_{\mu+q}^n t_n = u_\mu - i u_{\mu+q}, \end{cases}$$

où les p quantités u_λ sont positives, les q quantités $u_\mu^2 + u_{\mu+q}^2$ différentes de zéro. Par suite, l'équation (28) prend la forme

$$(39) \qquad u_0 u_1 u_2 \ldots u_{p-1} (u_p^2 + u_{p+q}^2) \ldots (u_{p+q-1}^2 + u_{p+2q-1}^2) = \frac{M}{a_0^n}.$$

Or introduisons un système de $n+1$ variables réelles, $x_0, x_1, \ldots, x_n$, liées avec un autre système de variables réelles $y_0, y_1, \ldots, y_n$ par un système d'équations, qui correspond exactement au système (38),

$$(40) \qquad \begin{cases} x_0 + z_\lambda x_1 + \ldots + z_\lambda^n x_n = y_\lambda, \\ x_0 + z_\mu x_1 + \ldots + z_\mu^n x_n = y_\mu + i y_{\mu+q}, \\ x_0 + z_{\mu+q} x_1 + \ldots + z_{\mu+q}^n x_n = y_\mu - i y_{\mu+q}. \end{cases}$$

A présent choisissons une racine déterminée z_λ ou z_μ, et opérons distinctement selon les deux cas. Mais, parce qu'il n'y a pas de différence essentielle entre les individus des deux groupes, remplaçons z_λ par z_0, z_μ par z_p. Dans le premier cas fixons l'attention sur tous les systèmes de nombres entiers $x_0, x_1, \ldots x_n$, qui satisfont aux conditions que l'on ait

$$(41) \qquad y_0 y_1 \cdots y_{p-1}(y_p^2 + y_{p+q}^2)\cdots(y_{p+q-1}^2 + y_{p+2q-1}^2) < \frac{M}{a_0^n},$$

que $y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}$ soient positifs, et que $\frac{y_1}{y_0}$ soit contenu entre $\frac{u_1}{u_0}$ et 1, $\frac{y_2}{y_0}$ entre $\frac{u_2}{u_0}$ et $1, \ldots, \frac{y_{p-1}}{y_0}$ entre $\frac{u_{p-1}}{u_0}$ et 1. Supposé qu'il n'y ait pas de racines complexes, ou que q soit égal à zéro, ce sont les inégalités complètes dont il s'agit. Si q diffère de zéro, soit

$$(42) \qquad \begin{cases} y_\mu + i y_{\mu+q} = r_\mu(\cos\varphi_\mu + i\sin\varphi_\mu), \\ u_\mu + i u_{\mu+q} = s_\mu(\cos\psi_\mu + i\sin\psi_\mu), \end{cases}$$

les quantités r_μ et s_μ étant positives, les quantités ψ_μ déterminées de sorte qu'elles correspondent à la partie imaginaire de l'expression, dans laquelle se change (32) pour $\alpha = \mu$. Cela étant, nous ajoutons les conditions que, pour $\mu = p, p+1, \ldots, p+q-1$, le quotient $\frac{r_\mu}{y_0}$ doit être située entre $\frac{s_\mu}{u_0}$ et 1, et que la variable φ_μ doit être comprise entre les valeurs $-\psi_\mu$ et ψ_μ; par conséquent les systèmes définis de nombres entiers sont à mettre en compte autant de fois que le domaine respectif des variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est rempli par l'extension signalée des variables φ_μ.

Or il suit directement des principes des intégrales multiples que le nombre S_0 des systèmes définis de nombres entiers s'exprime par l'intégrale

$$(43) \qquad \Omega_0 = \int\int \ldots dx_0 dx_1 \ldots dx_n,$$

étendue sur le domaine défini par les inégalités mentionnées, de sorte que le rapport de S_0 et Ω_0 se rapproche de l'unité. Au lieu des va-

riables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ introduisons les variables $y_0, y_1, \ldots, y_n$. On conclut d'abord des équations (40) que l'élément de l'intégrale actuelle se change dans l'élément $dy_0 dy_1 \ldots dy_n$, multiplié par le quotient des déterminants

$$(44) \qquad \frac{(2i)^q}{\mathfrak{D}},$$

où le déterminant $\mathfrak{D}$ est formé de telle sorte, que ledit quotient devienne positif. Partant, on a l'équation

$$(45) \qquad \Omega_0 = \frac{(2i)^q}{\mathfrak{D}} \int\int \cdots dy_0 dy_1 \ldots dy_n,$$

qui, à l'aide des variables définies par (42), se change dans celle-ci

$$(46) \quad \Omega_0 = \frac{(2i)^q}{\mathfrak{D}} \int\int \cdots dy_0 dy_1 \ldots dy_{p-1} r_p dr_p d\varphi_p \ldots r_{p+q-1} dr_{p+q-1} d\varphi_{p+q-1}.$$

Maintenant remplaçons les variables $y_1, \ldots, y_{p-1}, r_p, \ldots, r_{p+q-1}$ par les quotients

$$(47) \quad \frac{y_1}{y_0} = \eta_1, \quad \ldots, \quad \frac{y_{p-1}}{y_0} = \eta_{p-1}, \quad \frac{r_p}{y_0} = \rho_p, \quad \ldots, \quad \frac{r_{p+q-1}}{y_0} = \rho_{p+q-1},$$

d'où il vient

$$(48) \quad \Omega_0 = \frac{(2i)^q}{\mathfrak{D}} \int\int \cdots y_0^{p+2q-1} dy_0 d\eta_1 \ldots d\eta_{p-1} \rho_p d\rho_p d\varphi_p \ldots \rho_{p+q-1} d\rho_{p+q-1} d\varphi_{p+q-1},$$

le nombre $p + 2q - 1$ étant égal à n.

L'intégration demandée par rapport à la variable y_0, accomplie de $y_0 = 0$ jusqu'à une valeur positive y_0, donne le facteur $\frac{y_0^{n+1}}{n+1}$, tandis que la juste valeur y_0 est déterminée en introduisant les variables (47) dans l'inégalité (41), de sorte qu'on a

$$(49) \qquad y_0^{n+1} \eta_1 \ldots \eta_{p-1} \rho_p^2 \ldots \rho_{p+q-1}^2 = \frac{M}{n_0^n}.$$

On arrive donc à l'équation

$$(50)\qquad \Omega_0 = \frac{(2i)^q}{\mathfrak{D}} \frac{M}{(n+1)a_0^i} \int\int \cdots \frac{d\tau_{i1}}{\tau_{i1}} \cdots \frac{d\tau_{ip-1}}{\tau_{ip-1}} \frac{d\rho_p}{\rho_p} \cdots \frac{d\rho_{p+q-1}}{\rho_{p+q-1}} d\varphi_{ip-1} \cdots d\varphi_{ip+q-1},$$

où toutes les intégrations séparées s'exécutent conformément aux inégalités données. Attendu que le quotient $\tau_{i1} = \frac{y_1}{y_0}$ doit être étendu entre les limites $\frac{u_1}{u_0}$ et 1, l'intégrale $\int \frac{d\tau_{i1}}{\tau_{i1}}$ devient égale à la valeur absolue du logarithme naturel de la fraction $\frac{u_1}{u_0}$. Les autres intégrations de la même forme donneront des résultats semblables, tandis que les intégrations respectives aux variables $\varphi_{i\mu}$ s'achèvent immédiatement. En désignant par ε_0 l'unité positive ou négative, telle que le produit de tous les logarithmes par ε_0 devient positif, nous obtenons l'expression définitive

$$(51)\qquad \begin{cases} \Omega_0 = \dfrac{\varepsilon_0(2i)^q}{\mathfrak{D}} \dfrac{M}{(n+1)a_0^i} \log\left(\dfrac{u_1}{u_0}\right) \cdots \log\left(\dfrac{u_{p-1}}{u_0}\right) \log\left(\dfrac{s_p}{u_0}\right) \cdots \\ \qquad \times \log\left(\dfrac{s_{p+q-1}}{u_0}\right) 2^q \psi_p \cdots \psi_{p+q-1}. \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, où domine la racine choisie z_p, nous considérons tous les systèmes de nombres entiers $x_0, x_1, \ldots, x_n$, qui sont assujettis aux conditions de remplir l'inégalité (41), tandis que $y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}$ sont positifs, les fractions

$$\frac{y_0}{r_p}, \quad \frac{y_1}{r_p}, \quad \ldots, \quad \frac{y_{p-1}}{r_p}, \quad \frac{r_{p+1}}{r_p}, \quad \ldots, \quad \frac{r_{p+q-1}}{r_p},$$

comprises respectivement entre l'unité positive et les limites

$$\frac{u_0}{s_p}, \quad \frac{u_1}{s_p}, \quad \ldots, \quad \frac{u_{p-1}}{s_p}, \quad \frac{s_{p+1}}{s_p}, \quad \ldots, \quad \frac{s_{p+q-1}}{s_p},$$

et les variables $\varphi_{i\mu}$ déterminées comme dans le premier cas.

Le nombre S_p de ces systèmes de nombres est représenté dans une approximation de la sorte indiquée, par l'intégrale

$$(52)\qquad \Omega_p = \int\int \ldots dx_0 dx_1 \ldots dx_n.$$

étendue sur le domaine considéré. Par l'emploi des variables y_0, y_1, ..., y_{p-1}, r_p, φ_p, ..., r_{p+q-1}, φ_{p+q-1}, elle se change dans la suivante :

$$(53)\quad \Omega_p = \frac{(2i)^q}{\mathfrak{D}} \int\int \ldots dy_0 \ldots dy_{p-1} r_p dr_p d\varphi_p \ldots r_{p+q-1} dr_{p+q-1} d\varphi_{p+q-1}.$$

En introduisant les quotients

$$(54)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{y_0}{r_p} = \zeta_0, & \ldots, & \dfrac{y_{p-1}}{r_p} = \zeta_{p-1}, \\ \dfrac{r_{p+1}}{r_p} = \sigma_{p+1}, & \ldots, & \dfrac{r_{p+q-1}}{r_p} = \sigma_{p+q-1}, \end{array} \right.$$

au lieu des variables y_0, ..., y_{p-1}, r_{p+1}, ..., r_{p+q-1}, il vient la transformation

$$(55)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_p = \dfrac{(2i)^q}{\mathfrak{D}} \int\int \ldots r_p^{p+2q-1} dr_p d\zeta_0 \ldots d\zeta_{p-1} \\ \qquad \times d\varphi_p \sigma_{p+1} d\sigma_{p+1} d\varphi_{p+1} \ldots \sigma_{p+q-1} d\sigma_{p+q-1} d\varphi_{p+q-1}. \end{array} \right.$$

En intégrant par rapport à la variable r_p nous acquérons le facteur $\dfrac{r_p^{n+1}}{n+1}$, où l'inégalité (41) sert à la détermination de r_p

$$(56)\quad r_p^{n+1} \zeta_0 \zeta_1 \ldots \zeta_{p-1} \sigma_{p+1}^2 \ldots \sigma_{p+q-1}^2 = \frac{M}{a_0^n}.$$

Partant il vient

$$(57)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_p = \dfrac{(2i)^q}{\mathfrak{D}} \dfrac{M}{(n+1)a_0^n} \displaystyle\int\int \ldots \frac{d\zeta_0}{\zeta_0} \ldots \frac{d\zeta_{p-1}}{\zeta_{p-1}} \\ \qquad \times \dfrac{d\sigma_{p+1}}{\sigma_{p+1}} \ldots \dfrac{d\sigma_{p+q-1}}{\sigma_{p+q-1}} d\varphi_p \ldots d\varphi_{p+q-1}. \end{array} \right.$$

Les intégrations étant exécutées comme auparavant, et étant désignée par ε_p l'unité positive ou négative, dont l'apposition fait positif le produit de tous les logarithmes, on parvient au résultat

$$(58)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_p = \varepsilon_p \dfrac{(2i)^q}{\mathfrak{D}} \dfrac{M}{(n+1)a_0^n} \log\left(\dfrac{u_0}{s_p}\right) \cdots \\ \qquad \times \log\left(\dfrac{u_{p-1}}{s_p}\right) \log\left(\dfrac{s_{p+1}}{s_p}\right) \cdots \log\left(\dfrac{s_{p+q-1}}{s_p}\right) 2^q \psi_p \ldots \psi_{p+q-1}. \end{array} \right.$$

Il paraît clairement que les expressions trouvées des intégrales Ω_0 et Ω_p sont composées par la multiplication des logarithmes des quotients, qui, pour une valeur croissante de m convergent vers des combinaisons très simples des racines z_α. Le rapport indiqué entre (32) et (33) donne les rapprochements requis, que nous dénoterons à l'aide du signe de l'égalité,

$$\log\left(\frac{u_1}{u_0}\right) = z_1 - z_0, \qquad \ldots, \qquad \log\left(\frac{u_{p-1}}{u_0}\right) = z_{p-1} - z_0,$$

$$\log\left(\frac{s_p}{u_0}\right) = \frac{z_p + z_{p+q}}{2} - z_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\log\left(\frac{s_{p+q-1}}{u_0}\right) = \frac{z_{p+q-1} + z_{p+2q-1}}{2} - z_0,$$

$$\log\left(\frac{u_0}{s_p}\right) = z_0 - \frac{z_p + z_{p+q}}{2}, \qquad \ldots, \qquad \log\left(\frac{u_{p-1}}{s_p}\right) = z_{p-1} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2},$$

$$\log\left(\frac{s_{p+1}}{s_p}\right) = \frac{z_{p+1} + z_{p+q+1}}{2} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\log\left(\frac{s_{p+q-1}}{s_p}\right) = \frac{z_{p+q-1} + z_{p+2q-1}}{2} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2},$$

$$2\psi_p = \frac{z_p - z_{p+q}}{i}, \qquad \ldots, \qquad 2\psi_{p+q-1} = \frac{z_{p+q-1} - z_{p+2q-1}}{i}.$$

Moyennant cela, il se trouve constaté que *le nombre* S_0 *et le nombre* S_p *des systèmes définis de nombres entiers sont représentés d'une précision si exacte que l'on voudra, dans le sens expliqué, par les expressions algébriques*

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} S_0 &= \varepsilon_0 \frac{2^q}{\mathfrak{D}} \frac{M}{(n+1)a_0^n}(z_1 - z_0)\ldots(z_{p-1} - z_0)\left(\frac{z_p + z_{p+q}}{2} - z_0\right)\cdots \\ &\quad \times \left(\frac{z_{p+q-1} + z_{p+2q-1}}{2} - z_0\right)(z_p - z_{p+q})\ldots(z_{p+q-1} - z_{p+2q-1}), \\ S_p &= \varepsilon_p \frac{2^q}{\mathfrak{D}} \frac{M}{(n+1)a_0^n}\left(z_0 - \frac{z_p + z_{p+q}}{2}\right)\cdots \\ &\quad \times \left(z_{p-1} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2}\right)\left(\frac{z_{p+1} + z_{p+q+1}}{2} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2}\right)\cdots \\ &\quad \times \left(\frac{z_{p+q-1} + z_{p+2q-1}}{2} - \frac{z_p + z_{p+q}}{2}\right)\cdots(z_p - z_{p+q})\ldots(z_{p+q-1} - z_{p+2q-1}). \end{aligned}\right.$$

Vu que l'indice zéro peut être remplacé par les indices $1, 2, \ldots, p-1$, l'indice p par les indices $p+1, \ldots, p+q-1$, nous obtenons par le changement respectif une détermination tout à fait semblable des p nombres $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$ et des q nombres $S_p, S_{p+1}, \ldots, S_{p+q-1}$. Or, je ne manquerai pas de rappeler votre attention sur ce fait, que le nombre de ces nombres, $p+q$, surpasse de l'unité le nombre des unités fondamentales dans la théorie des nombres complexes, qui découlent de l'équation $f(z)=0$, nombre fameux découvert par *Dirichlet*. Dans le cas traité séparément de $p=0$, $q=1$, il n'y a que le seul nombre S_0. Dans le cas également détaillé de $p=2$, $q=0$, il est clair que les deux nombres S_0 et S_1 coïncident. Dans le cas général on rencontre une relation très simple entre les intégrales $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{p-1}, \Omega_p, \ldots, \Omega_{p+q-1}$, qui ont servi à la représentation approximative des nombres $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}, S_p, \ldots, S_{p+q-1}$. En considérant que lesdites intégrales sont les produits du facteur commun

$$\frac{2^q}{\mathfrak{D}} \frac{M}{(n+1)a_0^n}(z_p - z_{p+q})\ldots(z_{p+q-1} - z_{p+2q-1}),$$

par des unités $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{p+q-1}$, et par des produits formés des différences des éléments réels

$$z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_{p-1}, \quad \frac{z_p + z_{p+q}}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{z_{p+q-1} + z_{p+2q-1}}{2},$$

il suit d'un théorème algébrique connu, l'équation

$$(60) \qquad \frac{1}{\varepsilon_0 \Omega_0} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon_{p-1}\Omega_{p-1}} + \frac{1}{\varepsilon_p \Omega_p} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon_{p+q-1}\Omega_{p+q-1}} = 0,$$

qui ramène la connaissance de la valeur de chacune de ces expressions à la détermination de toutes les expressions restantes.

Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques;

PAR M. G. HUMBERT.

1. M. Poincaré a démontré qu'on peut toujours exprimer les coordonnées des points d'une courbe algébrique en fonction fuchsienne d'un paramètre : c'est ce résultat capital qui a servi de point de départ au présent Mémoire, et nous a permis d'appliquer aux courbes de genre quelconque les principes et la méthode dont nous avons fait usage, dans un autre travail, pour étudier les courbes de genre un.

On connaît la relation intime qui existe entre la Géométrie sur une courbe algébrique et la théorie des intégrales abéliennes qui appartiennent à cette courbe : c'est Clebsch qui a mis le premier cette relation en évidence dans son beau Mémoire *Sur l'application des fonctions abéliennes à la Géométrie,* publié au *Journal de Crelle,* t. 63; il est revenu sur la question, avec plus de détails, dans ses *Leçons sur la Géométrie,* recueillies et complétées par M. Lindemann.

Il résulte de ces travaux que le théorème d'Abel et les éléments de la théorie de l'inversion des intégrales abéliennes de première espèce permettent de traiter, d'une manière complète, la question de l'intersection d'une courbe algébrique et d'une courbe adjointe quelconque, et de résoudre, en particulier, dans le cas des courbes adjointes, le problème dit des *courbes de contact.*

Pour les courbes non adjointes, il faut introduire en outre des intégrales de troisième espèce; la question se rattache alors au problème

de l'inversion étendu, et Clebsch ne l'a pas traitée d'une manière générale, au point de vue géométrique.

L'emploi des fonctions fuchsiennes nous a permis de combler cette lacune, sans recourir à la théorie des intégrales de troisième espèce : nous avons d'ailleurs envisagé la question de l'intersection d'une courbe algébrique et d'une courbe quelconque, adjointe ou non adjointe, à un autre point de vue que Clebsch.

Clebsch se préoccupait spécialement des relations qui lient les coordonnées des points d'intersection; nous avons, au contraire, examiné celles qui lient les paramètres dont dépend l'équation de la courbe sécante, soumise à certaines conditions; et nous avons pu ainsi, dans le problème des courbes de contact, donner non seulement les propriétés des systèmes de points de contact, comme l'a fait Clebsch dans le cas particulier des courbes adjointes, mais indiquer la forme de l'équation générale des courbes de contact, et en déduire des propriétés géométriques de ces courbes elles-mêmes.

Les cinq premiers paragraphes de notre travail sont consacrés à l'exposition de quelques propriétés importantes des fonctions fuchsiennes et thêtafuchsiennes : en particulier, on démontre au § III une proposition purement algébrique, relative aux zéros et aux infinis d'une fonction fuchsienne, proposition identique, au fond, au théorème d'Abel, et qui joue dans notre théorie le rôle que joue, dans la théorie des courbes de genre un, le théorème de Liouville sur les zéros et les infinis d'une fonction doublement périodique.

Dans les §§ VI-X, on expose les principes de la représentation des coordonnées des points d'une courbe à l'aide des fonctions thêtafuchsiennes, et l'on étudie l'intersection d'une courbe de genre p et d'une courbe adjointe. On est ainsi conduit à distinguer deux espèces de courbes de genre p.

Dans les §§ XI-XII, on aborde la question de l'intersection d'une courbe de genre p et d'une courbe quelconque, et l'on traite le problème général des courbes de contact.

On termine enfin par l'étude sommaire de quelques courbes spéciales, des courbes hyperelliptiques en particulier.

2. Parmi les modes de représentation en fonctions fuchsiennes,

indiqués par M. Poincaré pour les coordonnées des points d'une courbe de genre p, celui que nous avons adopté est le suivant.

Soit R_0 un polygone fuchsien de la première famille de $4p$ côtés, et tel que les côtés opposés soient conjugués : tous les sommets de ce polygone appartiennent alors à un même cycle, et l'on pourra supposer que la somme de tous les angles de R_0 est égale à 2π. Un tel polygone définit un groupe fuchsien G, et il sera toujours possible de déterminer les paramètres de ce groupe, de telle sorte qu'étant donnée une relation algébrique quelconque $f(x, y) = 0$, on puisse poser $x = F(z)$, $y = \varphi(z)$, F et φ étant deux fonctions fuchsiennes du groupe G.

Remarque. — Soient ab et $a_1 b_1$ deux côtés opposés de R_0, tels que les points a et b correspondent respectivement aux points a_1 et b_1; il résulte des travaux de M. Poincaré que, si l'on décrit le périmètre du polygone en partant de a dans le sens ab, le côté conjugué sera parcouru dans le sens $b_1 a_1$.

I. — Fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré.

3. Soit $\Theta(z)$ une fonction thêtafuchsienne de groupe G, holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental, et de degré m, c'est-à-dire telle que l'on ait, $\left(z, \frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \varpi}\right)$ étant une des substitutions de G,

$$\Theta\left(\frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \varpi}\right) = \Theta(z)(\nu z + \varpi)^{2m}, \tag{1}$$

en supposant $\lambda\varpi - \mu\nu = 1$.

Dans le cas que nous considérons, la somme des angles du polygone R_0 étant égale à 2π, les sommets de ce polygone ne sont pas, en général, des zéros de la fonction $\Theta(z)$: le nombre des zéros de cette fonction dans l'intérieur de R_0 sera, d'après une formule donnée par M. Poincaré, égal à $2m(p-1)$.

Bien que M. Poincaré, en étudiant les fonctions qui satisfont à l'équation (1), ait supposé que m désignait un entier supérieur à l'unité, la formule précédente, dont la démonstration ne s'appuie que sur la

relation (1), est également applicable au cas $m = 1$: la fonction thêta-fuchsienne correspondante est alors du premier degré.

Il est facile de démontrer l'existence de fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un, et de donner une expression analytique de ces fonctions.

Soient, en effet, x_1, x_2, x_3 trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m; posons $x = \frac{x_2}{x_1}$, $y = \frac{x_3}{x_1}$: les deux fonctions fuchsiennes x et y seront liées par une relation algébrique $f(x, y) = 0$, que nous écrirons aussi $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Il est aisé de déterminer le degré de cette relation. Soit k le nombre des zéros communs aux trois fonctions x_1, x_2, x_3 : les fonctions x et y auront, dans R_0, $2m(p-1) - k$ infinis, ces infinis étant d'ailleurs les mêmes pour les deux fonctions, et, par suite, une droite

$$ax + by + c = 0$$

coupera la courbe $f = 0$ en $2m(p-1) - k$ points : le degré de cette courbe sera donc $2m(p-1) - k$.

Il n'existera, comme on le voit aisément, qu'un cas d'exception, celui où les équations

$$x(z) = x(\alpha), \qquad y(z) = y(\alpha),$$

α désignant l'affixe d'un point quelconque intérieur à R_0, auraient, dans l'intérieur de ce polygone, d'autres solutions communes que la solution $z = \alpha$.

Si nous écartons ce cas particulier, nous pouvons dire que la courbe $f = 0$ est de degré $2m(p-1) - k$, et qu'à un point de cette courbe ne correspond, dans l'intérieur de R_0, qu'une seule valeur de l'argument z.

4. Cela posé, considérons l'expression

$$(2) \qquad \theta(z) = \frac{P(x, y)}{f'_y}\frac{dx}{dz} = \frac{P(x_1, x_2, x_3)}{f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3)}\left(x_1\frac{dx_2}{dz} - x_2\frac{dx_1}{dz}\right),$$

où $P(x, y)$ est le premier membre de l'équation d'une courbe de

degré $n-3$ [étant posé $2m(p-1)-k=n$], adjointe à la courbe $f=0$.

Il est clair qu'on a

$$(3)\qquad \theta\left(\frac{\lambda z+\mu}{\nu z+\varpi}\right)=\theta(z)(\nu z+\varpi)^2.$$

Je dis d'ailleurs que $\theta(z)$ est holomorphe à l'intérieur de R_0 : on voit en effet, par la deuxième expression de cette fonction, qu'elle ne peut devenir infinie que pour les valeurs de z qui annulent f'_{x_3}.

Or on a

$$x_1 f'_{x_1}+x_2 f'_{x_2}+x_3 f'_{x_3}=nf=0,$$
$$\frac{dx_1}{dz}f'_{x_1}+\frac{dx_2}{dz}f'_{x_2}+\frac{dx_3}{dz}f'_{x_3}=0,$$

x_3 et $\frac{dx_3}{dz}$ ne devenant pas infinis dans l'intérieur de R_0, les valeurs de z qui annulent f'_{x_3} vérifient les équations

$$0=x_1 f'_{x_1}+x_2 f'_{x_2},\qquad 0=\frac{dx_1}{dz}f'_{x_1}+\frac{dx_2}{dz}f'_{x_2},$$

et, par suite, annulent le déterminant $x_1\frac{dx_2}{dz}-x_2\frac{dx_1}{dz}$, à moins qu'on n'ait à la fois $f'_{x_1}=f'_{x_2}=f'_{x_3}=0$.

Dans la première hypothèse, le numérateur de θ est nul, en même temps que le dénominateur, et la fonction reste finie; dans la deuxième, deux cas pourront se présenter :

Ou le zéro commun des fonctions $f'_{x_1}, f'_{x_2}, f'_{x_3}$ sera un des k zéros communs à x_1, x_2, x_3, et $\theta(z)$ reste fini pour ces valeurs de z, comme le montre la première expression de la fonction; ou le zéro commun sera l'argument d'un point double de f, argument qui, par hypothèse, annule $P(x_1, x_2, x_3)$, et θ reste encore fini.

Il résulte de cette discussion que $\theta(z)$ est une fonction thêtafuchsienne du premier degré, holomorphe dans l'intérieur du polygone R_0.

Cherchons maintenant quels sont, dans ce polygone, les zéros de la fonction.

En partant de l'expression

$$\theta(z)=\frac{P(x,y)}{f'_y}\frac{dx}{dz},$$

et en remarquant que les infinis de f'_y, c'est-à-dire les infinis de x et y, ou les zéros de x_3, n'annulent pas $\theta(z)$, on voit que les zéros de cette fonction seront :

1° Les zéros de $P(x, y)$ n'annulant pas f'_y, c'est-à-dire ne correspondant pas à un point singulier de f : leur nombre est égal à celui des points communs aux courbes $P = 0$ et $f = 0$, distincts des points singuliers de cette dernière, c'est-à-dire à $2(p' - 1)$, p' étant le genre de la courbe $f = 0$.

2° Les zéros de $\frac{dx}{dz}$ qui n'annulent pas f'_y. Or la relation

$$\frac{dx}{dz} f'_x + \frac{dy}{dz} f'_y = 0$$

montre qu'un tel zéro, α_0, doit annuler $\frac{dy}{dz}$; donc, dans le voisinage du point $z = \alpha_0$, x et y se développent en série de la forme

$$x = x_0 + \frac{1}{1.2}(x - x_0)^2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right) + \ldots,$$

$$y = y_0 + \frac{1}{1.2}(y - y_0)^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) + \ldots;$$

d'où

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 + \ldots,$$

$$f'_y = 2B(y - y_0) + \ldots,$$

et f'_y s'annulera également pour $z = \alpha_0$. Il en résulte que $\theta(z)$ n'a, dans le polygone R_0, que $2(p' - 1)$ zéros.

Or une fonction thêtafuchsienne holomorphe du premier degré, de groupe G, a, dans R_0, $2(p - 1)$ zéros ; on a donc $p' = p$, et la courbe $f = 0$ est de genre p. Ainsi :

Trois fonctions thêtafuchsiennes x_1, x_2, x_3, de degré m, ayant k zéros communs dans le polygone générateur, et telles que les équations $\frac{x_1(z)}{x_1(\alpha)} = \frac{x_2(z)}{x_2(\alpha)} = \frac{x_3(z)}{x_3(\alpha)}$ n'aient pas dans ce polygone d'autre solution que $z = \alpha$, sont liées par une relation algébrique homogène $f = 0$ d'ordre $2m(p - 1) - k$ et de genre p.

Les arguments des points autres que les points singuliers, où la

courbe $f = 0$ est coupée par une courbe adjointe quelconque d'ordre $2m(p-1) - k - 3$, sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne, holomorphe dans le cercle fondamental et de degré un.

5. La courbe $f = 0$, étant de genre p, admet p courbes adjointes d'ordre $n - 3$, dont les équations sont linéairement distinctes : nous pourrons ainsi, en partant de l'expression (2), former p fonctions thêtafuchsiennes holomorphes et de degré un, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ qui sont évidemment linéairement indépendantes.

Je dis que toute fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un, $\theta(z)$, est fonction linéaire et homogène des précédentes.

En effet, le rapport $\dfrac{\theta(z)}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)}$, étant une fonction fuchsienne, s'exprime rationnellement en fonction de x et y [1].

On peut donc écrire

$$\theta(z) = \frac{dx}{dz}\,\frac{P(x, y)}{f'_y},$$

$P(x, y)$ étant une fonction rationnelle. On démontrerait aisément, comme dans la théorie des intégrales abéliennes, que $\theta(z)$ ne peut rester fini dans le polygone R_0 que si P est un polynôme entier et la courbe $P = 0$ une adjointe à la courbe $f = 0$, de degré $n - 3$.

II. — Périodes.

6. Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ p fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré, linéairement distinctes.

---

[1] On a en effet, en désignant par u une fonction fuchsienne,

$$\varphi(u, x) = 0, \qquad \psi(u, y) = 0,$$

φ et ψ étant deux fonctions algébriques : u est donc une fonction rationnelle de x et de y, à moins qu'à des valeurs $x(\alpha)$, $y(\alpha)$ de x et y, correspondant à un même point de la courbe $f = 0$, ne corresponde plus d'une valeur de u ; ce cas ne peut se présenter que si les équations $x(z) = x(\alpha)$, $y(z) = y(\alpha)$ ont, dans R_0, d'autres solutions communes que $z = \alpha$, hypothèse que nous avons écartée.

Considérons l'intégrale

$$I = \int_z^{\frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \varpi}} \theta_k(z)\, dz,$$

$\left(z, \frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \varpi}\right)$ étant une des substitutions du groupe G : cette intégrale a une valeur indépendante de z, car

$$\frac{dI}{dz} = \theta_k\left(\frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \varpi}\right) \frac{1}{(\nu z + \varpi)^2} - \theta_k(z) = 0$$

en vertu de (3).

Soient $S_1(z)$, $S_2(z)$ deux substitutions du groupe G : on a identiquement

$$\int_z^{S_2[S_1(z)]} \theta_k(z)\, dz = \int_z^{S_1(z)} \theta_k(z)\, dz + \int_{S_1(z)}^{S_2[S_1(z)]} \theta_k(z)\, dz.$$

Or la dernière intégrale est, d'après ce qui précède, égale à

$$\int_z^{S_2(z)} \theta_k(z)\, dz.$$

Il en résulte que, en désignant par $S(z)$ une substitution quelconque du groupe G, on aura

$$(4) \qquad \int_z^{S(z)} \theta_k(z)\, dz = m\omega_k + m'\omega'_k + \ldots + m^{(2p-1)}\omega_k^{(2p-1)},$$

m, m', ... étant des entiers, et ω_k, ω'_k, ... désignant les valeurs de l'intégrale correspondant aux $2p$ substitutions fondamentales de G, c'est-à-dire aux substitutions qui transforment respectivement l'un dans l'autre les côtés conjugués du polygone R_0.

Si au lieu de θ_k on considère une autre fonction analogue θ_l, on aura de même

$$\int_z^{S(z)} \theta_l(z)\, dz = m\omega + m'\omega'_l + \ldots,$$

m, m', ... étant les mêmes que dans la relation (4), puisque ces entiers ne dépendent que de la manière dont S est formée à l'aide des substitutions fondamentales.

Les quantités ω_k sont évidemment les *périodes* de l'intégrale abélienne de première espèce

$$\int \frac{P_k(x, y)}{f'_y} dx.$$

III. — Zéros et infinis des fonctions fuchsiennes.

7. Soit $F(z)$ une fonction fuchsienne quelconque d'*ordre* μ, c'est-à-dire ayant μ zéros et μ infinis dans l'intérieur de R_0.

L'intégrale

$$J = \int \frac{\theta_k(z)\, dz}{F(z) - u},$$

où u désigne une constante arbitraire et θ_k une fonction thètafuchsienne holomorphe du premier degré, est nulle le long du périmètre de R_0. Soient en effet ab et $a_1 b_1$ deux côtés conjugués de ce polygone, tels que, par la substitution $\left(z, \frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \varpi}\right)$, ab se transforme en $a_1 b_1$. D'après une remarque faite au n° **2**, si l'on décrit le périmètre de R_0, à partir de a, dans le sens ab, on décrira le côté conjugué de ab dans le sens $b_1 a_1$. La partie de l'intégrale relative à ces deux côtés sera donc

$$i = \int_a^b \frac{\theta_k(z)\, dz}{F(z) - u} - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\theta_k(z_1)\, dz_1}{F(z_1) - u}.$$

Soit z_1 le point de l'arc $a_1 b_1$ qui correspond au point z de l'arc ab. On a

$$F(z_1) = F(z), \qquad \theta_k(z_1) = \theta_k(z)(\nu z + \varpi)^2, \qquad dz_1 = dz(\nu z + \varpi)^{-2}$$

et, par suite,

$$\frac{\theta_k(z)\, dz}{F(z) - u} = \frac{\theta_k(z_1)\, dz_1}{F(z_1) - u}.$$

ce qui entraîne $i = 0$. On a donc aussi, le long du périmètre de R_0,

$$J = 0.$$

En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ les μ zéros de $F(z) - u$ compris dans l'intérieur de R_0, il vient par suite

$$0 = \frac{\theta_k(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)} + \frac{\theta_k(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)} + \ldots.$$

Or, si dans l'équation $F(\alpha) - u = 0$, on considère α comme une fonction de u, on a

$$F'(\alpha)\,d\alpha = du,$$

et, par suite,

$$0 = \theta_k(\alpha_1)\,d\alpha_1 + \theta_k(\alpha_2)\,d\alpha_2 + \ldots.$$

Faisons varier u depuis la valeur u considérée jusqu'à une valeur u', les zéros $\alpha_1 \ldots$ varieront d'une manière continue et prendront finalement les valeurs $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$; on aura donc

$$(5) \qquad 0 = \int_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \theta_k(\alpha_1)\,d\alpha_1 + \int_{\alpha_2}^{\alpha'_2} \theta_k(\alpha_2)\,d\alpha_2 + \ldots.$$

Il peut arriver que, dans leurs variations, une ou plusieurs des quantités α sortent du polygone R_0 : si α'_1, par exemple, est en dehors de ce polygone, désignons par β_1 le point correspondant dans R_0.

On a

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \theta_k(z)\,dz = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)\,dz + \int_{\beta_1}^{\alpha'_1} \theta_k(z)\,dz.$$

Or la dernière intégrale est (§ II) de la forme $m\omega_k + m'\omega_k + \ldots$. Si donc on désigne par $\beta_1, \beta_2, \ldots$ les zéros de $F(z) - u'$ compris dans R_0, il vient

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)\,dz + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \theta_k(z)\,dz + \ldots = h\omega_k + h'\omega'_k + \ldots.$$

$h, h', \ldots$ étant des entiers. En donnant successivement à k les valeurs $1, 2, \ldots, p$, on obtiendra p équations de cette forme, les entiers $h, h', \ldots$ étant évidemment les mêmes pour toutes ces équations On a ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum\int_{\alpha}^{\beta_i} \theta_1(z)\,dz = h\omega_1 + h'\omega'_1 + \ldots + h^{(2p-1)}\omega^{(2p-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu) \\ \sum\int_{\alpha}^{\beta_i} \theta_p(z)\,dz = h\omega_p + h'\omega'_p + \ldots + h^{(2p-1)}\omega_p^{(2p-1)}. \end{array}\right.$$

Ces relations, si l'on se reporte à l'équation (2), reviennent manifestement au *théorème d'Abel*, relatif aux intégrales de première espèce.

En particulier, on peut, dans les équations (6), supposer que α_1, $\alpha_2, \ldots$ sont les zéros, $\beta_1, \beta_2, \ldots$ les infinis d'une fonction fuchsienne.

Le quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m est une fonction fuchsienne : les équations (6) restent donc vraies si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les zéros d'une de ces fonctions, par $\beta_1, \beta_2, \ldots$ ceux de l'autre.

8. On peut déduire des équations (6) un théorème dont nous ferons souvent usage :

Toute fonction fuchsienne d'ordre $p - k$ peut être mise de $k + 1$ façons différentes sous la forme du quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré.

Plus généralement :

Soient h fonctions fuchsiennes, d'ordre n, ayant mêmes infinis, et linéairement distinctes : si l'inégalité $p + h - n > 0$ est vérifiée, chacune de ces fonctions pourra se mettre, de $p + h - n$ façons différentes, sous la forme du quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré.

En effet, $F_1, \ldots, F_h$, étant h fonctions fuchsiennes d'ordre n, ayant

les mêmes infinis, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, la fonction

$$f(z) = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \ldots + u_h F_h + u_{h+1},$$

où $u_1, \ldots$ sont des constantes, a les mêmes infinis, et l'on peut disposer de $u_1, \ldots$ de manière à l'annuler pour h valeurs quelconques de z, $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_{n-h}$ les $n-h$ autres zéros de cette fonction. On a

$$\int_{\beta_1}^{\lambda_1} \theta_k(z)\,dz + \ldots + \int_{\beta_{h+1}}^{\mu_1} \theta_k(z)\,dz + \ldots + \int_{\beta_n}^{\mu_{n-h}} \theta_k(z)\,dz = \text{const.}$$
$$(k = 1, 2, \ldots p);$$

d'où, en dérivant successivement par rapport aux quantités variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$,

$$(7) \qquad \theta_k(\lambda_1) + \theta_k(\mu_1)\frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_1} + \ldots + \theta_k(\mu_{n-h})\frac{\partial \mu_{n-h}}{\partial \lambda_1} = 0,$$

$$(7\ bis) \qquad \theta_k(\lambda_2) + \theta_k(\mu_1)\frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_2} + \ldots = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots p),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit, pour fixer les idées, $p - n + h = 2$: les quantités μ sont au nombre de $p-2$; les équations (7) étant en nombre p, on en conclut que les déterminants formés avec $p-1$ lignes quelconques du Tableau

$$\begin{array}{ccccc}
\theta_1(\lambda_1) & \theta_1(\mu_1) & \theta_1(\mu_2) & \ldots & \theta_1(\mu_{p-2}) \\
\theta_2(\lambda_1) & \theta_2(\mu_1) & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\theta_p(\lambda_1) & \theta_p(\mu_1) & \ldots\ldots & \ldots & \theta_p(\mu_{p-2})
\end{array}$$

sont nuls; en vertu des relations (7 *bis*), etc., on obtient de même des résultats nuls, en remplaçant dans la première colonne de ce Tableau λ_1 par $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Il en résulte que les deux fonctions thêtafuchsiennes

holomorphes, de degré un et linéairement distinctes,

$$\theta(z) = \begin{vmatrix} \theta_1(z) & \theta_1(\mu_1) & \dots & \theta_1(\mu_{p-2}) \\ \theta_2(z) & \theta_2(\mu_1) & \dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \theta_{p-1}(z) & \theta_{p-1}(\mu_1) & \dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix},$$

$$\theta'(z) = \begin{vmatrix} \theta_2(z) & \theta_2(\mu_1) & \dots & \theta_2(\mu_{p-2}) \\ \theta_3(z) & \theta_3(\mu_1) & \dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \theta_p(z) & \theta_p(\mu_1) & \dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix},$$

s'annulent pour $z = \lambda_1, \dots, \lambda_h, \mu_1, \dots, \mu_{p-2}$.

Les rapports $\frac{\theta(z)}{f(z)}, \frac{\theta'(z)}{f(z)}$ sont ainsi holomorphes dans l'intérieur du polygone R_0, et ce sont évidemment des fonctions thêtafuchsiennes du premier degré, θ_0 et θ'_0. On a donc

$$f(z) = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\theta'}{\theta'_0}.$$

Une telle égalité subsiste, quelles que soient les constantes $u_1, u_2, \dots$ et, en particulier, si elles sont toutes nulles, sauf une, c'est-à-dire si $f(z)$ se réduit à $F_1(z), F_2(z), \dots, F_h(z)$. C. Q. F. D.

9. Les équations (6) montrent qu'on ne peut pas se donner arbitrairement les zéros et les infinis d'une fonction fuchsienne; p de ces quantités sont déterminées par les autres.

De même on ne pourra choisir *arbitrairement* plus de $2m(p-1)-p$ des $2m(p-1)$ zéros d'une fonction thêtafuchsienne de degré m.

Il existe pourtant un cas d'exception : pour le découvrir, supposons qu'on puisse former une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m s'annulant pour $2m(p-1)-p+1$ zéros arbitrairement choisis, $\lambda_1, \lambda_2, \dots$.

Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$ les $p-1$ autres zéros; on aura, en différentiant successivement par rapport aux variables λ les équations du

théorème d'Abel

$$(8)\quad 0 = \theta_k(\lambda_1) + \theta_k(\mu_1)\frac{\partial\mu_1}{\partial\lambda_1} + \ldots + \theta_k(\mu_{p-1})\frac{\partial\mu_{p-1}}{\partial\lambda_1} \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Les équations (8) étant au nombre de p et les quantités $\frac{\partial\mu}{\partial\lambda_1}$ au nombre de $p-1$, le déterminant de ces équations est nul, et, par un raisonnement identique à celui qu'on a fait plus haut, on voit que tous les zéros de la fonction thêtafuchsienne de degré m considérée annulent une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un. On a donc $m = 1$.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante, car une fonction thêtafuchsienne holomorphe du premier degré étant de la forme

$$a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \ldots + a_p\theta_p$$

pourra avoir $p-1$ zéros quelconques, et les autres zéros, déterminés par les précédents, sont en nombre $2(p-1)-(p-1) = p-1$.

IV. — Fonctions thêtafuchsiennes holomorphes.

10. On peut déduire de ce qui précède le nombre M des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m, linéairement indépendantes, c'est-à-dire le nombre de ces fonctions au moyen desquelles toutes les autres s'expriment linéairement.

On aura évidemment, puisqu'une telle fonction a $2m(p-1)$ zéros dans l'intérieur du polygone R_0, et que p de ces zéros sont déterminés en fonction des autres par les relations (6)

$$(9)\quad \begin{cases} M \leqq 2m(p-1) - p + 1; \\ \text{ou} \\ M \leqq (2m-1)(p-1). \end{cases}$$

D'un autre côté, trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes, de

degré m, x_1, x_2, x_3, n'ayant aucun zéro commun, sont liées par une relation algébrique $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, de degré $2m(p-1)$ ou n, et de genre p (§ I). Une courbe $P = 0$, de degré $n-3$, adjointe à la courbe $f = 0$, coupe cette dernière aux points singuliers et en $2(p-1)$ autres points; par ces points et les points doubles de $f = 0$, dont le nombre est égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$, faisons passer des courbes de degré $n-2$: leur équation générale renfermera, sous forme linéaire et homogène, un nombre de paramètres arbitraires *au moins* égal à

$$n - p + 1 = (2m-1)(p-1).$$

Soit $C_i = 0$ l'équation de l'une d'entre elles : la fonction de z

$$\Theta_i(z) = \frac{C_i[x_1(z), x_2(z), x_3(z)]}{P[x_1(z), x_2(z), x_3(z)]}$$

est évidemment une fonction thêtafuchsienne de degré m; elle est d'ailleurs holomorphe dans le polygone R_0, puisque, par hypothèse, les zéros du dénominateur annulent le numérateur. On pourra former ainsi $(2m-1)(p-1)$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m : je dis qu'elles sont linéairement indépendantes.

S'il existait en effet une relation de la forme

$$\Sigma a_i \Theta_i = 0,$$

on en tirerait

$$\Sigma a_i C_i[x_1(z), \ldots] = 0$$

et, par suite, la fonction $\Sigma a_i C_i(x_1, x_2, x_3)$ s'annulant en tous les points de la courbe $f = 0$, on aurait identiquement, quels que soient x_1, x_2, x_3,

$$\Sigma a_i C_i(x_1, x_2, x_3) = A f,$$

A désignant un polynôme entier en x_1, x_2, x_3; mais les polynômes C_i étant de degré $n-2$, et f de degré n, A est nul, et l'on arrive ainsi à une relation linéaire et homogène entre les polynômes C_i, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a donc

$$M \geqq (2m-1)(p-1)$$

et, par suite, d'après (9),

$$M = (2m-1)(p-1). \tag{10}$$

Cette formule n'est pas vraie pour $m = 1$, parce que l'inégalité (9) n'est plus exacte : $p - 1$ seulement des zéros sont alors déterminés par les autres comme on l'a vu au n° **9**. On a dans ce cas $M = p$.

11. Il résulte de la valeur de M pour $m > 1$ qu'on peut toujours former une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m ayant pour zéros $2m(p-1)-p$ quantités choisies arbitrairement; les p autres zéros sont liés aux précédents par les p équations (6).

Peut-on en déduire qu'inversement $2m(p-1)$ quantités satisfaisant à ces équations sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m? Pour que cette conclusion soit légitime, il faut évidemment démontrer que, les valeurs λ de $2m(p-1)-p$ de ces quantités étant données, les équations (6) fournissent, pour les p autres μ, un seul système de valeurs, ou, s'ils en fournissent plusieurs, qu'il existe toujours une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m s'annulant pour les valeurs λ données et pour les valeurs μ d'un des systèmes correspondants.

Nous sommes ainsi conduit à la discussion des équations

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\alpha_1}^{\lambda_1} \theta_k(z)\,dz + \int_{\alpha_2}^{\lambda_2} \theta_k(z)\,dz + \ldots \\ &\quad + \int_{\beta_1}^{\mu_1} \theta_k(z)\,dz + \ldots + \int_{\beta_p}^{\mu_p} \theta_k(z)\,dz = h\,\omega_k + \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned}\right.$$

$\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots, \beta_p$ désignent les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe et de degré m, donnée, et quelconque d'ailleurs.

On obtient, en différentiant, les équations aux différentielles totales

$$0 = d\lambda_1\,\theta_k(\lambda_1) + d\lambda_2\,\theta_k(\lambda_2) + \ldots + d\mu_1\,\theta_k(\mu_1) + \ldots + d\mu_p\,\theta_k(\mu_p)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p).$$

On démontrerait sans difficulté, en suivant la marche adoptée par M. Briot pour la discussion des équations différentielles abéliennes, qui sont, au fond, identiques aux précédentes, que les relations (6) fournissent généralement, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont donnés, un seul système de valeurs de $\mu_1, \ldots, \mu_p$: toutefois, pour certains systèmes spéciaux de valeurs des λ, s des quantités $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_s$ peuvent être choisies arbitrairement; les autres sont déterminées sans ambiguïté en fonction des précédentes et des quantités λ. $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont alors des zéros de s fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un, linéairement distinctes.

Or nous verrons plus loin (§ VIII) que, dans ce cas, on peut former $s+1$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m s'annulant pour $z = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$. On pourra donc former une telle fonction s'annulant en outre pour $z = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$, et les autres zéros de cette fonction seront nécessairement, d'après (6), les quantités $\mu_{s+1}, \ldots, \mu_p$.

Il est donc permis d'énoncer la proposition suivante :

Si $2m(p-1)$ quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ satisfont aux relations

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)\,dz + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \theta_k(z)\,dz + \ldots = h\omega_k + \ldots$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots$ sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m, il existe toujours une semblable fonction admettant pour zéros les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

Remarque. — Dans le cas de $m > 1$, on pourra toujours, en vertu de la formule (10), former s fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m, linéairement distinctes, ayant pour zéros

$$2m(p-1) - p - s + 1$$

quantités données, et en général on ne pourra en former que s. Mais il peut se présenter des cas d'exception que nous étudierons plus loin au point de vue géométrique; nous nous bornerons à énoncer pour

l'instant la proposition suivante, qui se déduit immédiatement du théorème du n° **8**.

Si $s+\rho$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m, linéairement distinctes, ont $2m(p-1)-p-s+1$ zéros communs, elles sont, de ρ manières différentes, proportionnelles à des fonctions thêtafuchsiennes de degré un.

V. — Expression des fonctions fuchsiennes a l'aide des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes.

12. Soit $F(z)$ une fonction fuchsienne d'ordre n, admettant les zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et les infinis $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Proposons-nous de mettre $F(z)$ sous la forme du quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes.

Il est d'abord évident que ces deux fonctions devront, en général, avoir des zéros communs; car, s'il en était autrement, on aurait, en désignant leur degré par μ, $n=2\mu(p-1)$, et n serait divisible par $2(p-1)$.

Supposons n compris entre les nombres

$$2(\mu-1)(p-1) \quad \text{et} \quad 2\mu(p-1);$$

deux cas seront à distinguer suivant le signe de la différence

$$2\mu(p-1)-n-p.$$

Premier cas : $2\mu(p-1)-n-p \geqq 0$. — On pourra former une fonction thêtafuchsienne holomorphe, de degré μ, Θ, ayant pour zéros les n quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, et $2\mu(p-1)-n-p$ autres quantités qu'on peut choisir arbitrairement, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$; nous désignerons par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ les p derniers zéros de $\Theta(z)$.

Je dis maintenant qu'on peut former une autre fonction holomorphe de degré μ, $\Theta_0(z)$, ayant pour zéros :

1° Les n zéros de $F(z)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$;

2° Les $2m(p-1)-n-p$ quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$;

3° Les p quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$.

Il suffit en effet de démontrer, puisque $\beta_1, \ldots, \beta_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \rho_1, \ldots, \rho_p$ sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré μ, qu'on a les relations

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \theta_k(z)dz + \int_{\lambda_1}^{\lambda_1} \theta_k(z)dz + \ldots$$
$$+ \int_{\rho_1}^{\rho_1} \theta_k(z)dz + \ldots + \int_{\rho_p}^{\rho_p} \theta_k(z)dz = h\omega_k + \ldots$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

ou

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \theta_k(z)dz = h\omega_k + \ldots.$$

Or ces dernières relations sont vérifiées, puisque par hypothèse $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les zéros, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ les infinis d'une fonction fuchsienne $F(z)$. La fonction fuchsienne $\frac{\Theta_0}{\Theta}(z)$ aura par suite mêmes zéros et mêmes infinis que $F(z)$, dont elle ne différera que par un facteur constant.

Second cas : $2\mu(p-1) - n - p < 0$. — En ce cas, il sera généralement impossible de mettre $F(z)$ sous la forme du quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ; mais on pourra employer deux fonctions de degré $\mu + 1$: en vertu du raisonnement précédent, il suffit, pour le démontrer, de vérifier la condition

$$2(\mu + 1)(p - 1) - n - p \geqq 0$$

ou

$$2\mu(p - 1) - n + p - 2 \geqq 0.$$

Or cette inégalité est vraie, puisque par hypothèse n est inférieur à $2\mu(p-1)$ et que p est au moins égal à 2.

En ce cas, on aura

$$F(z) = \frac{\Theta_0(z)}{\Theta(z)},$$

Θ_0 et Θ étant deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré $\mu + 1$, ayant $2(\mu + 1)(p - 1) - n$ zéros communs, parmi lesquels $2(\mu + 1)(p - 1) - n - p$ peuvent être choisis arbitrairement.

Considérons maintenant deux fonctions fuchsiennes, F et F′, ayant mêmes infinis : il résulte de ce qui précède qu'on pourra les mettre sous la forme

$$F = \frac{\Theta_0}{\Theta}, \qquad F' = \frac{\Theta'_0}{\Theta},$$

Θ_0, Θ'_0, Θ étant des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes.

Remarque. — Les raisonnements précédents montrent que, si n quantités α sont liées à n quantités β par les relations

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k(z)\,dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \theta_k(z)\,dz = h\omega_k + h'\omega'_k + \ldots,$$

on pourra former une fonction fuchsienne d'ordre n admettant les quantités β comme zéros et les quantités α comme infinis. Il est clair d'ailleurs qu'on ne peut, à un facteur constant près, en former qu'une seule.

VI. — Expression des coordonnées des points d'une courbe algébrique.

13. Les coordonnées des points d'une courbe algébrique de genre p peuvent, comme l'a montré M. Poincaré, s'exprimer en fonction fuchsienne d'un paramètre, le polygone R_0 générateur ayant $4p$ côtés et étant déterminé comme nous l'avons rappelé. On pourra toujours, par un choix convenable des axes de coordonnées, faire en sorte que les fonctions fuchsiennes de z qui représentent les coordonnées x et y aient mêmes infinis; soit n leur ordre commun.

Nous supposerons que les équations $\frac{x(z)}{x(\alpha)} = \frac{y(z)}{y(\alpha)} = 1$ n'ont, dans le polygone R_0, d'autre solution commune que la solution $z = \alpha$: la courbe S, décrite par le point (x, y), est alors de degré n (§ I).

Soient

$$2(\mu - 1)(p - 1) \quad \text{et} \quad 2\mu(p - 1)$$

les deux multiples consécutifs de $2(p - 1)$ qui comprennent n. On pourra, d'après les résultats du paragraphe précédent, mettre x et y

sous la forme

$$x = \frac{\Theta_0}{\Theta}, \qquad y = \frac{\Theta'_0}{\Theta};$$

les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes Θ, Θ_0, Θ'_0 étant de degré μ ou $\mu + 1$ suivant le signe de la quantité $2\mu(p-1) - n - p$.

Si l'on a

$$2\mu(p-1) - n - p \geqq 0,$$

les coordonnées des points d'une courbe de degré n et de genre p pourront, en coordonnées homogènes, être représentées par trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ; on ne pourra employer, en aucun cas, pour cette représentation, des fonctions de degré $\mu - 1$, parce que le degré d'une courbe ainsi définie serait au plus égal à $2(\mu-1)(p-1)$, quantité inférieure à n par hypothèse.

Si l'on a

$$2\mu(p-1) - n - p < 0,$$

les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de la représentation seront, en général, de degré $\mu + 1$; toutefois, pour certaines courbes *spéciales* de degré n, on pourra employer des fonctions de degré μ, puisque, par hypothèse, $2\mu(p-1)$ est égal ou supérieur à n.

Il en résulte que les coordonnées x_1, x_2, x_3 des points d'une courbe algébrique de genre p pourront se mettre sous la forme

$$(\mathrm{R}) \quad x_i = a_1^{(i)}\Theta_1 + a_2^{(i)}\Theta_2 + \ldots + a^{(i)}_{(2\mu-1)(p-1)}\Theta_{(2\mu-1)(p-1)} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

Θ_1, Θ_2, ... désignant $(2\mu-1)(p-1)$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ linéairement distinctes; et $a_1^{(i)}$, ... des constantes.

Inversement, toute courbe représentée par des équations de la forme (R) sera du degré $2\mu(p-1) - k$, k désignant le nombre des zéros communs aux trois fonctions x_1, x_2, x_3, à condition toutefois que les équations

$$\frac{x_2}{x_1}(z) = \frac{x_2}{x_1}(\alpha), \qquad \frac{x_3}{x_1}(z) = \frac{x_3}{x_1}(\alpha)$$

n'aient dans R_0 d'autre solution commune que $z = \alpha$.

La courbe, en ce cas, sera de genre p, comme il résulte des considérations développées au § I.

VII. — Intersection d'une courbe de genre p et d'une courbe adjointe.

14. Soient x_1, x_2, x_3 trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ ayant k zéros communs. Proposons-nous d'étudier la courbe S décrite par le point (x_1, x_2, x_3).

Nous avons fait l'hypothèse que les équations

$$\frac{x_2}{x_1}(z) = \frac{x_2}{x_1}(\alpha), \qquad \frac{x_3}{x_1}(z) = \frac{x_3}{x_1}(\alpha)$$

n'ont, dans l'intérieur du polygone générateur de $4p$ côtés, R_0, pas d'autre solution commune que $z = \alpha$: cette hypothèse ne restreint pas la généralité, car on démontre sans grande difficulté que, si elle n'est pas vérifiée, la courbe S est de genre inférieur à p; les coordonnées de ses points peuvent donc s'exprimer à l'aide de fonctions thêtafuchsiennes de genre inférieur à p [1].

---

[1] On peut s'en rendre compte de la manière suivante. Supposons que la condition dont il s'agit ne soit pas remplie, et qu'à un point de la courbe S correspondent, dans R_0, deux valeurs, par exemple, de l'argument z. Si

$$P(x_1, x_2, x_3) = 0$$

est l'équation d'une courbe de degré $n - 3$ adjointe à S, on voit, comme au § I, que la fonction

$$\theta(z) = \frac{P(x_1, x_2, x_3)}{f'_{x_3}}\left(x_1 \frac{dx_2}{dz} - x_2 \frac{dx_1}{dz}\right)$$

est une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un, ayant par suite $2(p-1)$ zéros dans R_0. Or parmi ces zéros figurent les valeurs qui annulent P sans annuler f'_{x_3}, c'est-à-dire les arguments qui correspondent aux points non singuliers où P coupe S. Si p' est le genre de S, ces points sont en nombre égal à $2(p'-1)$ et les arguments correspondants sont au nombre de $4(p'-1)$. On a

Nous supposerons de plus que les fonctions x_1, x_2, x_3 ne sont ni de degré un, ni, ce qui revient au même, proportionnelles à des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un : nous aurons à étudier ensuite le cas où il en serait autrement.

Dans cette hypothèse, je dis qu'il n'existe que $(2\mu - 1)(p - 1) - k$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ, linéairement distinctes, et s'annulant pour les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des k zéros communs à x_1, x_2, x_3 : en effet, s'il existait davantage, x_1, x_2, x_3 seraient proportionnels à trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un (§ IV, *Remarque*).

De même, il n'existe que $[2(\mu h + \rho) - 1](p - 1) - hk$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré $\mu h + \rho$ linéairement distinctes, et admettant au degré de multiplicité h chacun des k zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; car, s'il en existait un plus grand nombre, on voit qu'en désignant par Θ_ρ une fonction thêtafuchsienne quelconque holomorphe de degré ρ, les fonctions $x_1^h \Theta_\rho$; $x_1^{h-1} x_2 \Theta_\rho$; $x_1^{h-1} x_3 \Theta_\rho$, qui admettent h fois chacun de ces zéros, seraient proportionnelles à trois fonctions de degré un : il en serait par suite de même de x_1, x_2, x_3.

15. L'étude des systèmes de points communs à une courbe algébrique et à ses courbes adjointes constitue une des théories les plus importantes de la Géométrie sur une courbe; elle repose, comme l'a fait voir Clebsch, sur le théorème d'Abel relatif aux intégrales de première espèce.

L'emploi des fonctions thêtafuchsiennes va nous permettre de retrouver simplement la plupart des résultats connus de cette théorie, et d'en démontrer de nouveaux.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par S la courbe de genre p et de degré $n = 2\mu(p - 1) - k$ décrite par le point $x_1(z), x_2(z), x_3(z)$; par $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les k zéros communs à x_1, x_2, x_3.

Les propositions suivantes mettent en évidence la relation simple

---

donc

$$4(p' - 1) \leq 2(p - 1),$$

et par suite

$$p' < p$$

dès que p dépasse 1.

qui lie la théorie des zéros des fonctions thêtafuchsiennes et celle de l'intersection d'une courbe algébrique avec ses courbes adjointes.

I. *Soit* C *une courbe adjointe à* S *d'ordre* $n+q-3$; *les arguments des points, autres que les points singuliers, communs à cette courbe et à* S, *annulent une fonction thêtafuchsienne holomorphe* $\Theta(z)$, *de degré* $\mu q+1$; *les autres zéros de cette fonction sont les quantités* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, *chacune au degré* q *de multiplicité.*

Inversement :

Soit $\Theta(z)$ *une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré* $\mu q+1$, *admettant comme zéro multiple d'ordre* q *chacune des quantités* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; *les autres zéros de cette fonction sont les arguments des points, autres que les points singuliers, où la courbe* S *est coupée par une courbe adjointe de degré* $n+q-3$.

En effet, $C(x_1, x_2, x_3) = 0$ étant l'équation d'une courbe adjointe de degré $n+q-3$, les arguments des $n(n+q-3)$ points où cette courbe coupe S annulent la fonction $C[x_1(z), x_2(z), x_3(z)]$, qui admet de plus les zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, chacun au degré $n+q-3$ de multiplicité. Cette fonction n'a pas d'autres zéros dans le polygone R_0, car ceux dont nous venons de parler sont en nombre égal à

$$n(n+q-3)+k(n+q-3),$$

c'est-à-dire à

$$2\mu(n+q-3)(p-1);$$

or la fonction $C[x_1(z), \ldots]$ est de degré $\mu(n+q-3)$ et a par suite $2\mu(n+q-3)(p-1)$ zéros dans le polygone R_0.

Cela posé, soit $P=0$ l'équation d'une courbe quelconque d'ordre $n-3$, adjointe à S, et coupant cette courbe en $2(p-1)$ points, distincts des points singuliers, dont les arguments vérifient la relation $\theta(z)=0$; $\theta(z)$ étant une fonction thêtafuchsienne holomorphe du premier degré (§ I).

Posons

$$\Theta(z) = \frac{C[x_1(z), \ldots]}{P[x_1(z), \ldots]}\,\theta(z).$$

La fonction $\Theta(z)$ est évidemment une fonction thêtafuchsienne de degré $\mu(n+q-3)+1-\mu(n-3)=\mu q+1$, dont les zéros, d'après l'expression précédente, sont les zéros de $C[x_1(z), \ldots]$ qui n'annulent pas $P[x_1(z), \ldots]$, c'est-à-dire les arguments des points non singuliers où C coupe S, et les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, chacune au degré q de multiplicité. Elle est d'ailleurs holomorphe, puisque les zéros du dénominateur annulent le numérateur : les arguments des points non singuliers où C coupe S et les quantités $\alpha, \ldots, \alpha_k$, prises au degré q de multiplicité, sont donc les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $\mu q+1$. C. Q. F. D.

Pour démontrer la réciproque, considérons ainsi toutes les courbes adjointes à S de degré $n+q-3$ et les fonctions $C[x_1(z), \ldots]$ correspondantes, nous obtenons une infinité de fonctions $\Theta(z)$. Cherchons combien de ces fonctions sont linéairement distinctes.

Les courbes d'ordre $n+q-3$ adjointes à S et dont les équations sont linéairement distinctes sont en nombre *au moins* égal à

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(n+q-2)(n+q-1)-[\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-p]\\&\quad=nq+p-1+\tfrac{1}{2}(q-1)(q-2);\end{aligned}$$

soient $C_1=0$, $C_2=0, \ldots$ leurs équations.

Parmi les courbes figurent évidemment celles dont l'équation est

$$0=S\varphi_{q-3},$$

φ_{q-3} désignant un polynôme quelconque d'ordre $q-3$, homogène en x_1, x_2, x_3. Ce polynôme renfermant $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ coefficients arbitraires, l'équation précédente fournit un nombre égal de courbes adjointes d'ordre $n+q-3$, linéairement distinctes, que nous choisirons pour les courbes

$$C_{nq+p}=0, \qquad C_{nq+p+1}=0, \qquad \ldots, \qquad C_{nq+p-1+\frac{1}{2}(q-1)(q-2)}=0.$$

Or si, dans l'expression de $\Theta(z)$, on remplace C par $S\varphi_{n-3}$, on trouve un résultat nul, puisque $S[x_1(z), \ldots]=0$: il ne nous reste ainsi que

$nq + p - 1$ *fonctions* $\Theta(z)$, formées avec les premiers membres des équations des courbes $C_1 = 0, \ldots, C_{nq+p-1} = 0$.

Je dis que ces fonctions $\Theta(z)$ sont linéairement distinctes.

En effet, par suite de ce qui précède, il n'existe pas, entre x_1, x_2, x_3, de relation identique de la forme

$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + \ldots + a_{nq+p-1} C_{nq+p-1} = S\varphi,$$

$a_1, \ldots$ étant des constantes et φ un polynôme de degré $q - 3$ en x_1, x_2, x_3. Or, si l'on avait une équation de la forme

$$a_1 \Theta_1(z) + a_2 \Theta_2(z) + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_1 C_1[x_1(z), \ldots] + a_2 C_2[x_2(z), \ldots] + \ldots = 0,$$

on en déduirait que la fonction $a_1 C_1(x_1, x_2, x_3) + \ldots$, qui s'annule en tous les points de la courbe S, est divisible par $S(x_1, x_2, x_3)$; on aurait ainsi

$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + \ldots = S\varphi,$$

relation que nous savons être impossible.

On obtient donc, par le procédé indiqué plus haut, $nq + p - 1$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré $\mu q + 1$, linéairement indépendantes, et admettant au degré q de multiplicité chacun des zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Or les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré $\mu q + 1$ qui admettent q fois ces k zéros sont en nombre au moins égal à

$$\begin{aligned}&[2(\mu q + 1) - 1](p - 1) - kq \\ &\quad = (2\mu q + 1)(p - 1) - q[2\mu(p - 1) - n] = nq + p - 1.\end{aligned}$$

Elles ne sont pas en nombre supérieur, ainsi qu'on l'a dit plus haut, puisque $x_1(z), x_2(z), x_3(z)$ ne sont pas proportionnels à trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un.

Il en résulte :

1° Que, par les points singuliers de S, on ne peut faire passer que

$nq + p - 1 + \frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ courbes adjointes d'ordre $n + q - 3$ dont les équations soient linéairement distinctes;

2° Que les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $\mu q + 1$, qui admet q fois chacun des zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, sont les arguments des points non singuliers où S est coupée par une courbe adjointe d'ordre $n + q - 3$. C. Q. F. D.

16. On démontrerait, en suivant une marche identique, les propositions suivantes, qu'on pourrait d'ailleurs déduire directement des précédentes.

II. *Soit* C *une courbe adjointe à* S *d'ordre* $n + q - 3$, *passant par les* $2(p-1)$ *points non singuliers communs à* S *et à une courbe adjointe quelconque d'ordre* $n - 3$; *les arguments des autres points (non singuliers) où cette courbe coupe* S *annulent une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré* μq, *dont les derniers zéros sont les quantités* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, *chacune au degré* q *de multiplicité.*

Inversement :

Soit $\Theta(z)$ *une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré* μq, *admettant comme zéro multiple d'ordre* q *chacune des quantités* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; *les autres zéros de cette fonction sont les arguments de points de* S, *situés, avec les* $2(p-1)$ *points où* S *est coupée par une courbe adjointe quelconque de degré* $n - 3$, *sur une courbe adjointe d'ordre* $n + q - 3$.

VIII. — Des groupes de points sur une courbe algébrique.

17. Considérons toutes les courbes adjointes d'un degré donné, qui passent, en dehors des points singuliers, par un certain nombre de points fixes de S; elles déterminent sur cette courbe, par leurs intersections mobiles, des groupes de points dont l'étude constitue l'objet principal de la *Géométrie sur une courbe algébrique*.

Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ les arguments des points de deux de ces groupes : on a évidemment, en se reportant au théorème I du

§ VII et aux résultats du § III, les relations

$$\int_{\beta_1}^{\lambda_1} \theta_i(z)\,dz + \int_{\beta_2}^{\lambda_2} \theta_i(z)\,dz + \ldots + \int_{\beta_h}^{\lambda_h} \theta_i(z)\,dz = l\omega_i + l'\omega'_i + \ldots$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p).$$

Inversement, les relations précédentes peuvent servir à définir les groupes de points indépendamment des courbes adjointes qui les traversent : si h quantités $\beta_1, \ldots, \beta_h$ sont liées à h quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ par des équations de cette forme, nous dirons que le groupe $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ est *équivalent* au groupe $\beta_1, \ldots, \beta_h$.

D'après cette définition, deux groupes équivalents à un troisième sont équivalents entre eux.

Nous dirons qu'un groupe $\beta'_1, \ldots, \beta'_{h'}$ est *résiduel* du groupe $\beta_1, \ldots, \beta_h$, par rapport à une courbe adjointe C_q, si les points d'arguments $\beta_1, \ldots, \beta_h, \beta'_1, \ldots, \beta'_{h'}$ constituent le système complet des intersections de la courbe S avec une courbe adjointe de degré q, les points singuliers exceptés [1].

Le théorème fondamental de la théorie des groupes est connu sous le nom de théorème du *reste;* il peut s'énoncer ainsi :

Si deux groupes sont résiduels par rapport à une courbe C_q, un groupe quelconque équivalent au premier est également résiduel d'un groupe quelconque équivalent au second.

Soient, en effet,

(β) et (β') deux groupes résiduels par rapport à une courbe C_{n+q-3};
(λ) un groupe équivalent à (β);
(λ') un groupe équivalent à (β').

On a

$$\sum_{j=1}^{j=h} \int_{\beta_j}^{\lambda_j} \theta_i(z)\,dz = l\omega_i + l'\omega'_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\sum_{j=1}^{j=h'} \int_{\beta'_j}^{\lambda'_j} \theta_i(z)\,dz = m\omega_i + m'\omega'_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

---

[1] Clebsch, *Leçons sur la Géométrie;* trad. Benoist, t. II, p. 137.

D'un autre côté, les groupes (β) et (β') étant résiduels, on a, en désignant par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{h'}$ les arguments des points communs à S et à une courbe adjointe C_{n+q-3} (§ III et VII) :

$$\sum_{j=1}^{j=h} \int_{\gamma_j}^{\beta_j} \theta_i(z)\,dz + \sum_{j=1}^{j=h'} \int_{\gamma'_j}^{\beta_j} \theta_i(z)\,dz = n\omega_i + n'\omega'_i + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{j=h} \int_{\gamma_j}^{\lambda_j} \theta_i(z)\,dz + \sum_{j=1}^{j=h'} \int_{\gamma'_j}^{\lambda'_j} \theta_i(z)\,dz = a\omega_i + a'\omega'_i + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Or on sait (§ VII) qu'il existe une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $\mu q + 1$, admettant comme zéros les quantités γ_j et γ'_j, et ayant comme zéro multiple d'ordre q chacune des quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$: il résulte de l'équation précédente qu'on peut former une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $\mu q + 1$, ayant les mêmes zéros multiples d'ordre q que la précédente, et admettant comme derniers zéros les quantités λ_j et λ'_j (n° **11**). En d'autres termes (§ VII, th. I), les groupes (λ) et (λ') constituent l'ensemble complet des intersections de S et d'une courbe adjointe de degré $n + q - 3$, les points singuliers exceptés : ils sont donc résiduels par rapport à une courbe C_{n+q-3}. C. Q. F. D.

18. Dans un système de groupes équivalents nous distinguerons, avec Clebsch [1], deux éléments importants :

1° Le *nombre* h des points d'un groupe du système;

2° La *multiplicité* r du système, c'est-à-dire le nombre des points d'un groupe qu'on peut se donner arbitrairement.

Nous désignerons un tel groupe par g_h^r.

Les arguments des points d'un groupe étant liés par p relations, on ne peut, en général, se donner arbitrairement que $h - p$ de ces points, et par suite, en général, on a $r = h - p$.

---

[1] Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*; trad. Benoist, t. II, p. 136.

Mais il pourra se faire qu'on ait $r = h - p + \rho$, et nous dirons dans ce cas que nous sommes en présence d'un système *spécial d'indice* ρ.

19. D'une manière générale, d'après la remarque du § V, l'étude des groupes équivalents à un groupe donné $\beta_1, \ldots, \beta_h$ est identique à l'étude des zéros des fonctions fuchsiennes qui admettent les infinis $\beta_1, \ldots, \beta_h$; car on peut former une et une seule fonction fuchsienne ayant pour infinis les arguments des points d'un groupe, et pour zéros les arguments des points d'un groupe équivalent.

D'un autre côté, les fonctions fuchsiennes ayant mêmes infinis sont évidemment des fonctions linéaires et homogènes d'un certain nombre d'entre elles, et ce nombre est précisément égal au degré de multiplicité du système auquel appartient le groupe considéré, augmenté de 1.

On peut donc dire, en désignant les fonctions fuchsiennes dont il s'agit par $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_{r+1}(z)$, que les arguments des points d'un groupe équivalent au groupe (β) sont les zéros d'une fonction de la forme

$$f(z) = a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z) + \ldots + a_{r+1} f_{r+1}(z)$$

et réciproquement. D'ailleurs, on doit retrouver parmi les groupes ainsi déterminés le groupe (β) lui-même, et, par suite, l'une des fonctions $f(z)$ devra avoir pour zéros $\beta_1, \ldots, \beta_h$: comme elle admet déjà ces quantités pour infinis, elle sera égale à une constante; nous pourrons donc supposer, par exemple, $f_{r+1} = 1$, et il reste

$$f(z) = a_1 f_1(z) + \ldots + a_r f_r(z) + a_{r+1}.$$

Cette remarque très simple va nous permettre de donner quelques propriétés des *systèmes spéciaux*.

S'il s'agit d'un système spécial, on a en effet

$$r = h - p + \rho.$$

Il existe alors r fonctions fuchsiennes linéairement distinctes, d'ordre h, ayant mêmes infinis $f_1(z), \ldots, f_r(z)$: par suite (§ III), une quelconque d'entre elles pourra se mettre de $p + r - h$, c'est-à-dire

de ρ manières différentes, sous la forme du quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un. On a ainsi

$$f_1(z) = \frac{\theta_1^1}{\theta_{r+1}^1} = \frac{\theta_1^2}{\theta_{r+1}^2} = \ldots = \frac{\theta_1^\rho}{\theta_{r+1}^\rho},$$

et, par conséquent, les zéros de f_1 annulent θ_1^s, et les infinis de cette fonction annulent $\theta_{r+1}^s (s = 1, 2, \ldots, \rho)$. Les fonctions f_1 et f_2 ayant mêmes infinis, la fonction thêtafuchsienne $f_2\theta_{r+1}^s$ est holomorphe, et, comme elle est du premier degré, elle est égale à une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un, θ_2^s : on a ainsi

$$f_2(z) = \frac{\theta_2^1}{\theta_{r+1}^1} = \frac{\theta_2^2}{\theta_{r+1}^2} = \ldots = \frac{\theta_2^\rho}{\theta_{r+1}^\rho};$$

et, de même,

$$f_3(z) = \frac{\theta_3^1}{\theta_{r+1}^1} = \ldots\ldots\ldots = \frac{\theta_3^\rho}{\theta_{r+1}^\rho},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut comprendre toutes ces relations en une seule, en désignant par $a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, u_1, \ldots, u_\rho$ des constantes arbitraires

$$a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r + a_{r+1} = \frac{u_1 \Sigma a_i \theta_i^1 + u_2 \Sigma a_i \theta_i^2 + \ldots + u_\rho \Sigma a_i \theta_i^\rho}{u_1 \theta_{r+1}^1 + u_2 \theta_{r+1}^2 + \ldots + u_\rho \theta_{r+1}^\rho}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r+1).$$

On en conclut que les h zéros de $a_1 f_1 + \ldots + a_{r+1}$, c'est-à-dire les arguments des h points d'un des groupes considérés, annulent la fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un $u_1 \Sigma a_i \theta_i^1 + \ldots$; ces h points sont donc situés (§ I et VII) sur des courbes adjointes d'ordre $n - 3$, dont l'équation générale est de la forme

$$u_1 P_1 + u_2 P_2 + \ldots + u_\rho P_\rho = 0,$$

et qui déterminent par suite, par leurs $2(p-1) - h$ autres points d'intersection avec S, un système de multiplicité $\rho - 1$.

Ce système est également un système spécial, car on a

$$p + \rho - 1 - 2(p-1) + h = h - p + \rho + 1 = r + 1,$$

et son indice est $r+1$. Géométriquement, nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, connue sous le nom de *théorème de Riemann et Roch* (¹) :

Par les points d'un groupe appartenant à un système spécial de multiplicité r et d'indice ρ, on peut faire passer un nombre $\rho-1$ fois infini de courbes adjointes de degré $n-3$. Ces courbes déterminent, par leurs points mobiles d'intersection avec la courbe primitive, un nouveau système de multiplicité $\rho-1$, qui est un système spécial d'indice $r+1$.

Ainsi les systèmes spéciaux sur une courbe d'ordre n peuvent toujours être découpés par une famille linéaire de courbes adjointes de degré $n-3$; et ils se groupent deux à deux, suivant la loi remarquable indiquée par le théorème précédent. On voit également qu'au point de vue algébrique l'étude des groupes spéciaux se ramène à celle des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré : nous reviendrons sur cette question dans le dernier paragraphe du présent Mémoire.

20. *Remarque I.* — Un système de groupes renfermant moins de $p+1$ points est un système spécial; car, r étant au moins égal à 1, on a

$$h-p+\rho \geqq 1 \quad \text{ou} \quad \rho \geqq p-h+1,$$

et, par suite, si h est inférieur à $p+1$, ρ est positif et le système est un système spécial d'indice égal ou supérieur à $p-h+1$.

21. *Remarque II.* — Si les h points d'un groupe sont sur une courbe adjointe de degré $n-3$, il en est de même des points de tout groupe équivalent.

La propriété est évidente si h est égal ou inférieur à $p-1$, puisque par $p-1$ points de S on peut toujours faire passer une courbe adjointe d'ordre $n-3$.

Si $h=p-1+s$, la courbe adjointe d'ordre $n-3$ qui, par hypo-

(¹) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*; trad. Benoist, t. III, p. 51.

thèse, contient les h points d'un groupe g, coupe S en

$$2(p-1)-h=p-1-s$$

autres points. Or, d'après le théorème, du reste, on obtient tous les groupes équivalents à g en menant par ces $p-1-s$ points toutes les courbes adjointes possibles d'ordre $n-3$, et en prenant les intersections mobiles de ces courbes. C. Q. F. D.

22. *Remarque III.* — Il est clair qu'au lieu de définir un système de groupes par des relations de la forme

$$\sum_{j=1}^{j=h}\int_{\beta_j}^{\lambda_j}\theta_k(z)\,dz=h\omega_k+h'\omega'_k+\ldots\quad(k=1,2,\ldots,p),$$

$\beta_1,\ldots,\beta_h$ étant des quantités fixes, et $\lambda_1,\ldots,\lambda_h$ les arguments des points d'un groupe, on peut partir d'équations telles que

$$\sum_{j=1}^{j=h}\int_{\beta_j}^{\lambda_j}\theta_k(z)\,dz=v_k+h\omega_k+\ldots,$$

les v_k étant des constantes. Les systèmes de valeurs des λ qui satisfont à ces équations sont les arguments de points appartenant à des groupes équivalents entre eux, mais non équivalents au groupe $\beta_1,\ldots,\beta_h$.

23. *Remarque IV.* — A la théorie des systèmes spéciaux se rattache la solution du problème suivant :

Comment doit-on choisir h points sur la courbe S *pour que les courbes adjointes de degré $n+q-3$ menées par ces points forment une famille linéaire l fois infinie, le nombre l étant plus grand qu'on ne devrait s'y attendre d'après les données de la question?*

Les points d'intersection de S avec toutes les courbes adjointes C_{n+q-3} forment un système dont la multiplicité est égale au nombre, diminué de 1, des fonctions thêtafuchsiennes linéairement indépendantes, de degré $\mu q+1$, qui admettent comme zéro multiple d'ordre k chacune des quantités $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, c'est-à-dire à $nq+p-2$

(§ VII, n^{os} **14** et **15**). Si l'on assujettit les courbes adjointes C_{n+q-3} à passer par h points fixes de S, elles déterminent par leurs intersections mobiles avec S un système de groupes dont la multiplicité est, en général, $nq + p - 2 - h$.

Le problème revient à choisir les h points de telle sorte que la multiplicité du système devienne $nq + p - 2 + h + \rho$.

Je dis qu'en ce cas le système considéré est un système spécial. Pour le démontrer, il suffit, en appelant h' le nombre des points d'un groupe du système, de calculer la quantité

$$nq + p - h - 2 + \rho - h' + p.$$

Or on a

$$n(n + q - 3) = h + h' + (n - 1)(n - 2) - 2p.$$

La quantité précédente se réduit par suite à ρ.

Le système est donc un système spécial d'indice ρ.

La réciproque de cette proposition est vraie et se démontrerait de la même manière, en partant du théorème du reste. Donc :

Par h points donnés sur la courbe S, *on peut faire généralement passer une famille linéaire de courbes adjointes d'ordre $n + q - 3$ t fois infinie; si les h points sont tels que leur système résiduel par rapport à des courbes C_{n+q-3} soit un système spécial d'indice ρ, la famille linéaire des courbes adjointes d'ordre $n + q - 3$ qui passent par ces points sera $t + \rho$ fois infinie, et réciproquement.*

Au point de vue algébrique, on peut déduire de tout ce qui précède une proposition dont nous avons fait usage au n°-**11**, et qui peut s'énoncer ainsi :

Soient s fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré, linéairement indépendantes, ayant q zéros communs, et une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré m admettant ces q zéros et s'annulant en outre, dans R_0, *pour les $2m(p - 1) - q$ valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. On pourra former $q - p + s + 1$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré m s'annulant pour $z = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$.*

IX. — Propriétés d'un système particulier.

24. Une courbe adjointe d'ordre $n-3$ coupe S en $2(p-1)$ points formant un groupe qui appartient à un système spécial.

En effet, on peut choisir arbitrairement $p-1$ de ces points, puisque les courbes adjointes d'ordre $n-3$ forment une famille $p-1$ fois infinie; on a donc

$$h = 2(p-1), \qquad r = p-1,$$

et, par suite, l'indice ρ du système est donné par la relation

$$\rho = p + r - h = p + p - 1 - 2(p-1) = 1.$$

Nous désignerons, dans ce qui suit, par γ tout groupe de $2(p-1)$ points communs à S et à une courbe adjointe d'ordre $n-3$.

Nous allons donner quelques propriétés du système des groupes résiduels des groupes γ par rapport aux courbes adjointes de degré $n-2$.

Soit C_{n-2} une courbe adjointe de degré $n-2$ passant par les points d'un groupe γ : elle coupe S en n nouveaux points, constituant un groupe que nous désignerons par Γ [1].

Il résulte de la théorie du paragraphe précédent que :

Un groupe γ et un groupe Γ quelconques sont sur une courbe adjointe d'ordre $n-2$.

Toute courbe adjointe d'ordre $n-2$ passant par les points d'un groupe γ (ou Γ) coupe S en de nouveaux points, formant un groupe Γ (ou γ).

Par n points pris sur S on peut faire passer en général une famille de courbes adjointes C_{n-2} $p-2$ fois infinie; si les n points forment un groupe Γ, la famille des courbes C_{n-2} qui passent par ces points sera $p-1$ fois infinie, et réciproquement.

Les arguments des points d'un groupe Γ sont les zéros d'une fonc-

---

[1] La courbe C_{n-2} peut se décomposer en une courbe adjointe C_{n-3} et en une droite : les groupes Γ sont donc équivalents au groupe formé par n points quelconques de S, situés en ligne droite.

tion thêtafuchsienne holomorphe de degré μ, dont les autres zéros sont les k quantités fixes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (§ VII, II).

Par les points d'un groupe γ et d'un groupe Γ quelconques, faisons passer une courbe adjointe d'ordre $n-1$, qui coupe S en n nouveaux points : je dis que ces points forment un groupe Γ.

En effet, les arguments des points autres que les points doubles, où cette courbe adjointe d'ordre $n-1$ coupe S, sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $2\mu+1$, dont les derniers zéros sont les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, chacune au second degré de multiplicité.

Appelons

$\Theta_{2\mu+1}(z)$ cette fonction;

$\Theta_\mu(z)$ la fonction thêtafuchsienne de degré μ qui s'annule pour les arguments des n points du groupe Γ considéré;

$\theta(z)$ la fonction thêtafuchsienne du premier degré qui s'annule pour les arguments des $2(p-1)$ points du groupe γ.

Les arguments des n points où la courbe adjointe d'ordre $n-1$, qui traverse les groupes Γ et γ, coupe de nouveau la courbe S, annulent évidemment la fonction $\frac{\Theta_{2\mu+1}}{\Theta_\mu \theta}$, qui est une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré μ, admettant comme zéros simples les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. C. Q. F. D.

La réciproque de ce théorème est vraie et se démontre de la même manière. Donc :

Une courbe adjointe d'ordre $n-1$ menée par les points d'un groupe γ et d'un groupe Γ quelconques coupe S en n nouveaux points formant un groupe Γ.

Deux groupes Γ et un groupe γ quelconques sont sur une courbe adjointe à S d'ordre $n-1$.

Plus généralement, on voit de même que :

Une courbe adjointe d'ordre $n+q-2$ menée par les points d'un groupe γ et de q groupes Γ quelconques coupe S en n nouveaux points formant un groupe Γ.

$(q+1)$ groupes Γ et un groupe γ quelconques sont sur une courbe adjointe à S d'ordre $n+q-2$.

X. — De deux espèces de courbes de genre p.

25. Soient n le degré d'une courbe de genre p; $2(\mu-1)(p-1)$ et $2\mu(p-1)$ les deux multiples consécutifs de $2(p-1)$ qui comprennent n, de telle sorte qu'on ait

$$2(\mu-1)(p-1) < n \leqq 2\mu(p-1).$$

Nous avons vu (§ V et VI) que si l'on a

$$2\mu(p-1)-p-n \geqq 0,$$

les coordonnées des points de la courbe considérée S peuvent, en coordonnées homogènes, être représentées par trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ; si, au contraire, on a

$$2\mu(p-1)-p-n < 0,$$

ces fonctions thêtafuchsiennes seront, en général, de degré $\mu+1$, sauf pour certaines courbes spéciales, dont les coordonnées des points seront des fonctions thêtafuchsiennes de degré μ.

Dans le cas où $2\mu(p-1)-p-n < 0$, il y a donc deux espèces de courbes de degré n et de genre p : nous allons indiquer quelques propriétés géométriques qui dérivent de la définition précédente, et nous montrerons ensuite qu'il existe également deux espèces de courbes, dans le cas où l'on a $2\mu(p-1)-p-n \geqq 0$.

Soit donc, en premier lieu,

$$2\mu(p-1)-p-n = -h;$$

on a nécessairement, d'après les hypothèses faites,

$$h \leqq p \qquad \text{et} \qquad h \geqq 1.$$

Pour les courbes générales de degré n et de genre p, que nous ap-

pellerons *courbes de seconde espèce,* les coordonnées des points seront des fonctions thêtafuchsiennes de degré $\mu + 1$, ayant $2(p-1)+p-h$ zéros communs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; pour les courbes spéciales, que nous appellerons *courbes de première espèce,* les coordonnées des points seront des fonctions thêtafuchsiennes de degré μ, ayant $p-h$ zéros communs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-h}$.

Considérons d'abord ces dernières courbes.

Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\mu+1}$, $(\mu+1)$ fonctions thêtafuchsiennes quelconques du premier degré; leur produit

$$\Theta(z) = \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_{\mu+1}$$

est évidemment une fonction thêtafuchsienne du degré $\mu + 1$. On peut choisir la fonction $\theta_{\mu+1}$ de façon qu'elle s'annule pour les $p-h$ zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots$, car on peut toujours former une fonction thêtafuchsienne du premier degré s'annulant pour moins de p valeurs données. Si maintenant on se reporte au § VII, on voit que les zéros de $\Theta(z)$, à l'exception de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-h}$ sont les arguments de points situés sur une courbe adjointe à S de degré $n-2$. On peut donc énoncer cette proposition.

Par les points simples communs à S et à μ courbes adjointes d'ordre $n-3$, on peut faire passer une courbe adjointe d'ordre $n-2$, dont les autres points d'intersection avec S sont sur une courbe adjointe d'ordre $n-3$ passant par $p-h$ points fixes.

Si nous considérons maintenant une courbe de seconde espèce, nous pourrons poser

$$\Theta(z) = \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_\mu \theta',$$

θ' étant une fonction thêtafuchsienne du second degré; on pourra, en général, choisir cette fonction de façon qu'elle s'annule pour les

$$2(p-1)+p-h$$

valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. En effet, les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du second degré sont fonctions linéaires et homogènes de $3(p-1)$ d'entre elles (§ IV), et la condition précédente pourra être remplie si

l'on a

$$3(p-1)-1 \geqq 2(p-1)+p-h$$

ou

$$h \geqq 2.$$

Ainsi, si h est supérieur ou égal à 2, on pourra, par les points communs à S et à μ courbes adjointes d'ordre $n-3$, faire passer une courbe adjointe d'ordre $n-2$: les autres points d'intersection de cette courbe avec S ne sont pas sur une courbe adjointe d'ordre $n-3$.

Si h est égal à l'unité, on ne pourra faire passer une courbe adjointe d'ordre $n-2$ que par les points communs à S et à $\mu-1$ courbes adjointes d'ordre $n-3$.

Arrivons, en second lieu, au cas où l'on a

$$2\mu(p-1)-p-n=h,$$

avec les conditions

$$h \geqq 0, \qquad h \leqq p-3.$$

Les coordonnées des points d'une courbe S de degré n et de genre p s'expriment par trois fonctions thêtafuchsiennes de degré μ, ayant $p+h$ zéros communs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

$p+h$ est compris entre p et $2p-3$: nous dirons que la courbe S est de première espèce si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont des zéros d'une même fonction thêtafuchsienne holomorphe du premier degré ; elle sera de seconde espèce dans le cas contraire ([1]).

On voit alors, comme plus haut, que par les points simples communs à une courbe de première espèce et à μ courbes adjointes d'ordre $n-3$ on peut faire passer une courbe adjointe de degré $n-2$, dont les autres points d'intersection avec la courbe primitive sont fixes; si la courbe est de seconde espèce, on ne pourra faire passer une courbe

---

([1]) Parmi les $p+h$ zéros, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, h$ sont arbitraires (§ V), et l'on peut remplacer le système $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ par un autre système $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$. Mais il est clair que les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$ constituent des groupes équivalents, et, par suite, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont les zéros d'une fonction thêtafuchsienne du premier ordre, il en sera de même de $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$ (*Rem. II*, § VIII).

adjointe d'ordre $n-2$ que par les points communs à la courbe considérée et à $\mu-1$ courbes adjointes d'ordre $n-3$.

26. En résumé :

Soit

$$2(\mu-1)(p-1) < n \leqq 2\mu(p-1).$$

Premier cas : $2\mu(p-1)-p-n \geqq 0$. — *Les courbes de degré n et de genre p se divisent en deux classes, distinguées par les propriétés suivantes :*

Appelons groupe γ tout groupe de $2(p-1)$ points simples, communs à la courbe de degré n et de genre p, et à une courbe adjointe C_{n-3}.

Sur une courbe de première espèce, μ groupes γ quelconques sont traversés par une courbe adjointe d'ordre $n-2$, qui coupe en outre la courbe considérée en $n-2(\mu-1)(p-1)$ points fixes.

Sur une courbe de deuxième espèce, $\mu-1$ groupes γ quelconques sont traversés par une courbe adjointe d'ordre $n-2$; μ groupes γ ne peuvent jamais être sur une telle courbe.

Second cas : $2\mu(p-1)-p-n < 0$. — *Les courbes de degré n et de genre p se divisent encore en deux classes.*

Sur une courbe de première espèce, μ groupes γ quelconques sont traversés par une courbe adjointe d'ordre $n-2$, dont les autres points d'intersection avec la courbe considérée, en nombre égal à $n-2(\mu-1)(p-1)$, sont sur une courbe adjointe d'ordre $n-3$, passant par $2\mu(p-1)-n$ points fixes de la courbe de genre p.

En particulier, si $n=2\mu(p-1)$, $\mu+1$ groupes γ quelconques sur la courbe de première espèce sont traversés par une courbe adjointe C_{n-2}.

Sur une courbe de seconde espèce, μ groupes γ quelconques sont traversés par une courbe adjointe d'ordre $n-2$; mais les autres points communs à cette courbe et à la courbe considérée ne peuvent être sur une même courbe adjointe d'ordre $n-3$.

Il y a exception pour le cas où $n = (2\mu - 1)(p - 1)$: on ne peut alors faire passer une courbe adjointe C_{n-2} que par $\mu - 1$ groupes γ de la courbe de seconde espèce.

27. Dans le cas des courbes de genre 2, les résultats précédents prennent une forme plus simple. Les groupes γ comprennent alors deux points que nous appellerons *points conjugués*.

Il y a deux espèces de courbes de degré n et de genre 2.

Soit d'abord

$$n = 2\mu.$$

La courbe de première espèce est celle dont les coordonnées des points sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ. *Sur une telle courbe, $\mu + 1$ couples de points conjugués sont toujours traversés par une courbe adjointe C_{n-2}, qui ne coupe la courbe primitive qu'en ces points et aux points singuliers.*

La courbe de deuxième espèce est celle dont les coordonnées des points sont des fonctions thêtafuchsiennes de degré $\mu + 1$ ayant deux zéros communs. *Sur une telle courbe, μ couples de points conjugués sont toujours traversés par une courbe adjointe C_{n-2} passant par deux points fixes, situés sur la courbe considérée.*

Soit

$$n = 2\mu - 1.$$

La courbe de première espèce est celle dont les coordonnées des points sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré μ ayant un zéro commun. *Sur une telle courbe, μ couples de points conjugués sont toujours traversés par une courbe adjointe C_{n-2}, coupant en outre la courbe primitive en un point qui est fixe.*

La courbe de deuxième espèce est celle dont les coordonnées des points sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré $\mu + 1$, ayant trois zéros communs. *Sur une telle courbe, $\mu - 1$ couples de points conjugués sont toujours traversés par une courbe adjointe C_{n-2} et μ couples ne le sont jamais.*

XI. — Intersection d'une courbe de genre p et d'une courbe algébrique.

28. Les arguments de mn points d'intersection de la courbe S, de degré n et de genre p, et d'une courbe quelconque, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, de degré q, sont donnés par l'équation

$$0 = f(z) = f[x_1(z), x_2(z), x_3(z)].$$

La fonction $f(z)$ est une fonction thêtafuchsienne de degré μq, qui admet comme zéro multiple d'ordre q chacune des quantités α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ [1]; les autres zéros de cette fonction, en nombre égal à $2\mu q(p-1) - kq$, c'est-à-dire à nq, sont les arguments des nq points communs aux deux courbes.

Inversement, soit $f(z)$ une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré μq, admettant comme zéros multiples d'ordre q les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$: les nq autres zéros de cette fonction ne sont pas nécessairement les arguments de points de la courbe S, situés sur une courbe de degré q; certaines conditions doivent être satisfaites pour qu'il en soit ainsi.

29. Le nombre de ces conditions se détermine comme il suit.

Remarquons d'abord que les fonctions $f(z)$ que nous considérons sont des fonctions linéaires et homogènes de $(2\mu q - 1)(p-1) - kq$ d'entre elles (n° **14**) $f_1, f_2, \ldots$; et distinguons ensuite deux cas

$$q < n \qquad \text{et} \qquad q \geqq n.$$

Si q est inférieur à n, les fonctions de la forme $x_1^{q_1}(z) x_2^{q_2}(z) x_3^{q_3}(z)$, où q_1, q_2, q_3 sont des entiers non négatifs de somme q, ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène (sinon la courbe S serait décomposable); ces fonctions sont d'ailleurs thêtafuchsiennes holo-

---

[1] On suppose toujours que les coordonnées d'un point de S sont trois fonctions thêtafuchsiennes de μ, ayant k zéros communs, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; on a alors

$$n = 2\mu(p-1) - k.$$

morphes de degré μq, et admettent comme zéros multiples d'ordre q les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$: leur nombre étant de $\frac{1}{2}(q+1)(q+2)$, on pourra exprimer $\frac{1}{2}(q+1)(q+2)$ des fonctions $f_1, f_2, \ldots$, en fonction linéaire des $(2\mu q - 1)(p-1) - kq - \frac{1}{2}(q+1)(q+2)$ autres fonctions f_i, et des fonctions $x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}$; si nous écrivons maintenant que dans l'expression de $f(z)$, les fonctions f_i disparaissent, nous exprimerons que les nq zéros de $f(z)$ autres que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, sont les arguments de points de S situés sur une courbe de degré q. Nous avons ainsi un nombre de conditions égal à

$$(2\mu q - 1)(p-1) - kq - \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2)$$

ou, puisque

$$k = 2\mu(p-1) - n,$$

égal à

$$nq - \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) - p + 1.$$

Si q est égal ou supérieur à n, les fonctions

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} \qquad (q_1 + q_2 + q_3 = q)$$

sont liées par des relations de la forme générale

$$\varphi_q = S\psi_{q-n},$$

ψ_{q-n} étant un polynôme quelconque de degré $q - n$.

Il y a donc entre les fonctions $x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}$ un nombre de relation linéaires et homogènes égal au nombre des coefficients de ψ, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(q-n+1)(q-n+2)$, et le nombre de ces fonctions linéairement distinctes sera par suite

$$\tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) - \tfrac{1}{2}(q-n+1)(q-n+2) = nq - \tfrac{1}{2}n(n-3).$$

On en conclut, par le raisonnement fait plus haut, que la fonction $f(z)$ devra vérifier $\frac{1}{2}n(n-3) - p + 1$ conditions, pour que ses nq zéros, autres que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, soient les arguments de points de S situés sur une courbe de degré q.

Dans le cas de $q = n - 1$ et $q = n - 2$, le nombre de ces relations

est le même que pour $q \geqq n$, c'est-à-dire égal au nombre des points doubles de la courbe S.

30. On peut mettre les relations dont il s'agit sous une forme très importante au point de vue des applications, comme l'a fait Clebsch dans le cas des courbes de genre 0 et de genre 1.

Si la fonction $f(z)$ est une somme de termes de la forme

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} \qquad (q_1 + q_2 + q_3 = q),$$

il est clair qu'on aura, en désignant par (e, e') les arguments qui correspondent à un point double E, de S [1]

$$\frac{f(e)}{x_1^q(e)} = \frac{f(e')}{x_1^q(e')}. \tag{14}$$

Les relations (14) sont précisément en nombre égal à

$$\tfrac{1}{2} n(n-3) - p + 1;$$

elles sont nécessairement vérifiées quand les nq zéros de $f(z)$, autres que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, sont les arguments de points de S situés sur une courbe algébrique d'ordre q; je dis maintenant qu'elles sont suffisantes.

La démonstration de ce théorème repose sur une interprétation géométrique simple qu'on peut donner de chacune de ces équations [2].

31. D'après la proposition II du § VII, les nq zéros de $f(z)$ dont il s'agit sont situés, avec les $2(p-1)$ points simples où S est coupée par une courbe adjointe quelconque d'ordre $n-3$, sur une courbe adjointe d'ordre $n+q-3$. Nous désignerons cette dernière courbe par F, et la courbe d'ordre $n-3$ considérée par P.

---

[1] Dans ce qui suit, nous supposerons, pour plus de simplicité, que la courbe S n'a comme points singuliers que des points doubles ou de rebroussement.

[2] Nous avons donné cette interprétation dans le cas des courbes de genre un (*Sur les courbes de genre un*, p. 55 et suiv.).

Si $n + q - 3$ est égal ou supérieur à n, c'est-à-dire si $q \geqq 3$, il y aura, pour une même fonction $f(z)$, une infinité de courbes F, ayant pour équation générale

$$(\mathrm{F}) \qquad \mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + \mathrm{SR}_{q-3},$$

$\mathrm{F}_0 = 0$ étant l'équation d'une quelconque d'entre elles, et R_{q-3} désignant un polynôme arbitraire de degré $q - 3$. Il résulte de cette équation que les courbes F, qui correspondent à une même fonction $f(z)$, ont même tangente en un quelconque des points doubles de S.

Or on a évidemment

$$(15) \qquad \mathrm{F}(z) = \alpha \mathrm{P}(z) f(z),$$

α étant une constante.

Supposons vérifiée une des équations (14)

$$(14) \qquad f(e) : x_1^q(e) = f(e') : x_1^q(e').$$

Prenons pour axes $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$ les deux tangentes à S au point double (e, e'); $x_2 = 0$ étant tangente à la branche e, $x_3 = 0$ à la branche e'. On aura, en ordonnant F et P par rapport aux puissances décroissantes de x_1,

$$\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_2 + a x_3) x_1^{n+q-4} + (\lambda' x_2^2 + \ldots) x_1^{n+q-5} + \ldots$$
$$\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3) = \mu(x_2 + b x_3) x_1^{q-3} + \ldots.$$

Or, d'après (15), $f(e)$ est la limite vers laquelle tend la fonction

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\mathrm{F}(e + \varepsilon)}{\mathrm{P}(e + \varepsilon)},$$

pour $\varepsilon = 0$.

C'est donc la limite de l'expression

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\lambda}{\mu} \frac{x_2(e + \varepsilon) + a x_3(e + \varepsilon)}{x_2(e + \varepsilon) + b x_3(e + e)} x_1^q(e).$$

Mais $x_2(e + \varepsilon)$ est infiniment petit par rapport à $x_3(e + \varepsilon)$, puisque

$x_2 = 0$ est la tangente de la branche e; il reste ainsi

$$f(e) = \frac{1}{\alpha}\frac{\lambda}{\mu}\frac{a}{b}x_1^q(e),$$

de même

$$f(e') = \frac{1}{\alpha}\frac{\lambda}{\mu}x_1^q(e'),$$

et la relation (14) donne par suite $a = b$. En d'autres termes :

Si l'équation (14), *relative à un point double, est vérifiée, les courbes* F *et* P *se touchent en ce point.*

32. Cela posé, si les équations (14) sont vérifiées pour tous les points doubles de S, les courbes F et P sont tangentes en

$$\tfrac{1}{2}n(n-3) - p + 1$$

points coïncidant avec les points doubles, et se coupent encore aux $2(p-1)$ points simples communs à S et à P. On peut donc dire que la courbe F passe par les points d'intersection des courbes S et P, et l'on peut écrire identiquement [1]

$$F = AP + BS,$$

A et B étant deux polynômes entiers, de degrés q et $q-3$.

33. On en conclut que les points d'intersection de F et de S, non situés sur la courbe P, c'est-à-dire les nq points dont les arguments vérifient l'équation $f(z) = 0$, sont sur la courbe de degré q, $A = 0$.

Les équations (14) *sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que les nq zéros de $f(z)$, autres que les k zéros d'ordre q $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, soient les arguments de nq points de* S, *situés sur une courbe de degré q.*

Remarque I. — Si la fonction $f(z)$ s'annule pour $z = e$ et $z = e'$,

---

[1] Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, traduct. Benoist, t. II, p. 45.

l'équation correspondante est identiquement vérifiée, et le nombre des conditions diminue d'une unité.

Si q est inférieur ou égal à $n-3$, le nombre des relations auxquelles doit satisfaire la fonction considérée, $f(z)$, est égal, comme on l'a vu, à

$$nq - \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) - p + 1;$$

en ce cas, il est clair que les équations (14) ne seront pas distinctes, et qu'elles se réduiront

$$nq - \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) - p + 1$$

d'entre elles.

Remarque II. — Si le point double (e, e') est un point de rebroussement, il faut, dans l'équation correspondante

$$f(e) : x_1^q(e) = f(e') : x_1^q(e'),$$

faire $e' = e + \varepsilon$ et faire tendre ε vers zéro; on trouve ainsi

$$x_1(e) f'(e) = q x_1'(e) f(e).$$

XII. — Applications géométriques. Courbes de contact.

Soient, sur une courbe algébrique S de degré n et de genre p, h groupes, $g_1, g_2, \ldots, g_h$, comprenant respectivement $l_1, l_2, \ldots, l_h$ points. Nous supposerons qu'il existe une courbe algébrique

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

de degré q, ayant avec S aux l_j points du groupe g_j un contact d'ordre $r_j - 1$, $(j = 1, 2, \ldots, h)$ et coupant en outre S en k_1 points doubles et en k_2 points simples. On a ainsi

$$nq = 2k_1 + k_2 + r_1 l_1 + \ldots + r_h l_h.$$

On demande de trouver la forme de l'équation générale des courbes de degré q, qui coupent S *aux k_1 points doubles et aux k_2 points simples précédents, et qui ont avec* S, *en l_j points formant un groupe équivalent à g_j, un contact d'ordre $r_j - 1$; $(j = 1, 2, \ldots h)$.*

En d'autres termes, il s'agit de trouver sous quelle forme entrent les constantes arbitraires dans l'équation $f = 0$, de ces courbes ou, ce qui revient au même, dans la fonction $f(z) = f[x_1(z), \ldots]$.

La fonction $F(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$ est évidemment une fonction fuchsienne d'ordre $nq - 2k_1 - k_2$.

Soient $\alpha_j, \beta_j, \ldots, \lambda_j$, les arguments des points du groupe g_j; α'_j, $\beta'_j, \ldots, \lambda'_j$, les arguments des points d'un groupe quelconque, équivalent au précédent, et par lequel passe la courbe $f = 0$.

Il existe une et une seule fonction fuchsienne, $F_j(z)$, ayant pour infinis $\alpha_j, \ldots, \lambda_j$ et pour zéros $\alpha'_j, \beta'_j, \ldots, \lambda'_j$ (n° **12**, Remarque); inversement, toute fonction fuchsienne d'ordre l_j, ayant pour infinis $\alpha_j, \ldots, \lambda_j$, aura pour zéros les arguments des points d'un groupe équivalent à g_j. Or les fonctions fuchsiennes ayant mêmes infinis, en nombre l_j, sont des fonctions linéaires et homogènes d'un certain nombre d'entre elles : ce nombre est égal à $l_j - p + 1$, si g_j n'est pas un groupe spécial, et à $l_j - p + 1 + \rho_j$ si g_j est un groupe spécial d'indice ρ_j (n° **19**).

On a donc

$$F_j(z) = \eta_1 F_j^{(1)}(z) + \eta_2 F_j^{(2)}(z) + \eta_3 F_j^{(3)}(z) + \ldots + \eta_{m_j} F_j^{(m_j)}(z),$$

en posant pour abréger $m_j = l_j - p + 1 + \rho_j$.

Dans cette formule $\eta_1, \eta_2, \ldots$ sont des constantes qui sont *arbitraires*, si l'on n'impose pas à $\alpha'_j, \ldots, \lambda'_j$ d'autre condition que d'être les arguments des points d'un groupe équivalent à g_j.

37. De là résulte la forme de la fonction $F(z)$; on a en effet évidemment

$$F(z) = F_1^{r_1}(z) F_2^{r_2}(z) \ldots F_h^{r_h}(x)$$

et, par suite

$$(f)\quad \begin{cases} f(z) = \varphi(z)\mathrm{F}(z) \\ \quad = \varphi(z)[\alpha_1 \mathrm{F}_1^{(1)} + \alpha_2 \mathrm{F}_1^{(2)} + \ldots + \alpha_{m_1} \mathrm{F}_1^{(m_1)}]^{r_1} \\ \qquad \times [\beta_1 \mathrm{F}_2^{(1)} + \ldots + \beta_{m_2} \mathrm{F}_2^{(m_2)}]^{r_2} \ldots [\delta_1 \mathrm{F}_h^{(1)} + \ldots + \delta_{m_h} \mathrm{F}_h^{(m_h)}]^{r_h}. \end{cases}$$

Nous écrirons symboliquement

$$(f\,bis)\qquad f(z) = (\alpha_1 \ldots a_{m_1})^{r_1} (\beta_1 \ldots \beta_{m_2})^{r_2} \ldots (\delta_1 \ldots \delta_{m_h})^{r_h}.$$

D'après la formule (f), les zéros de $f(z)$ sont : 1° les arguments correspondant aux k_1 points doubles et aux k_2 points simples considérés sur S; 2° les arguments de h groupes, équivalents à $g_1, \ldots, g_h$, aux degrés respectifs $r_1, \ldots, r_h$ de multiplicité; 3° les k zéros communs aux trois fonctions thêtafuchsiennes $x_1(z), x_2(z), x_3(z)$, au degré q de multiplicité. Il reste maintenant à exprimer que les nq zéros des deux premières catégories sont les arguments de nq points de S situés sur une courbe de degré q, passant par k_1 points doubles de la courbe S: on écrira pour cela les relations (14)

$$(14)\qquad f(e) : x_1^q(e) = f(e') : x_1^q(e').$$

Ces équations seront en nombre égal à

$$\tfrac{1}{2} n(n-3) - p + 1 - k_1,$$

si $q \geqq n-2$, et à

$$nq - \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) - p + 1 - k_1,$$

si $q \leqq n-3$ (§ XI).

Elles établiront des relations entre les constantes $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ qui figurent dans les formules (f) et $(f\,bis)$.

De là résultera sans difficulté la forme de l'équation générale cherchée.

38. Parmi les applications qu'on peut faire de cette théorie, la plus importante est relative à l'étude des courbes de contact. Le problème à traiter peut s'énoncer comme il suit :

Problème des courbes de contact. — Soit

$$nq = 2k_1 + k_2 + rl, \qquad q \geqq n - 2.$$

Trouver l'équation générale des courbes de degré q qui passent par k_1 points doubles et k_2 points simples donnés sur une courbe S, *de degré n et de genre p, et qui ont avec cette courbe en l points un contact d'ordre $r - 1$.*

Dans ce qui suit, nous désignerons par d, pour abréger, le nombre des points doubles de la courbe S

$$d = \tfrac{1}{2} n(n-3) - p + 1.$$

Soit $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ une des courbes répondant à la question, et ayant avec S un contact d'ordre $r - 1$ aux l points d'arguments β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_l$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ les arguments des points mobiles où l'une quelconque des courbes cherchées, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, touche S. On a, par l'application du théorème d'Abel,

$$r\int_{\beta_1}^{\alpha_1} \theta_i(z)\,dz + \ldots + r\int_{\beta_l}^{\alpha_l} \theta_i(z)\,dz = h\omega_i + h'\omega_i' + \ldots + h^{(2p-1)}\omega_i^{(2p-1)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

d'où

$$(16) \qquad \int_{\beta_1}^{\alpha_1} \theta_i(z)\,dz + \ldots + \int_{\beta_l}^{\alpha_l} \theta_i(z)\,dz = \frac{1}{r}(h\omega_i + h'\omega_i' + \ldots).$$

Dans le second membre, on peut donner aux $2p$ entiers $h, h', \ldots$ les valeurs $0, 1, \ldots, r-1$: il en résulte que les courbes cherchées se divisent en r^{2p} *systèmes*, et que les groupes formés par les l points de contact correspondant aux courbes d'un même système sont équivalents.

Supposons que les courbes $\varphi = 0$ et $f = 0$ appartiennent au même système; on aura, d'après ce qui précède,

$$f(z) = \varphi(z)[\lambda_1 F^{(1)} + \lambda_2 F^{(2)} + \ldots + \lambda_m F^{(m)}]^r,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ étant des constantes, et étant posé

$$m = l - p + 1 + \rho,$$

en désignant par ρ l'indice du système des groupes équivalents au groupe des points de contact de S et de φ. (Dans le cas général, ce système ne sera pas spécial, et l'on aura $\rho = 0$.)

Les fonctions $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)}$ sont des fonctions fuchsiennes d'ordre l, ayant pour infinis les quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$.

On a de plus entre les constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les équations (14), qui prennent ici une forme remarquable.

On a, en effet (n° **30**),

$$\frac{\varphi(e')}{\varphi(e)} \frac{x_1^q(e)}{x_1^q(e')} = 1$$

et, par suite,

$$[\lambda_1 F^{(1)}(e) + \ldots + \lambda_m F^{(m)}(e)]^r = [\lambda_1 F^{(1)}(e') + \ldots + \lambda_m F^{(m)}(e')]^r.$$

On a $d - k_1$ équations de cette forme. On peut les écrire, en extrayant les racines $r^{\text{ièmes}}$ des deux membres,

$$(17) \quad \lambda_1 F^{(1)}(e) + \ldots + \lambda_m F^{(m)}(e) = e^{2s\frac{i\pi}{r}} [\lambda_1 F^{(1)}(e') + \ldots + \lambda_m F^{(m)}(e')],$$

s étant un entier qui peut prendre les valeurs $0, 1, \ldots, r-1$ [1].

En combinant ces valeurs, on aura, puisqu'il y a $d - k_1$ équations de la forme précédente, r^{d-k_1} groupes d'équations *linéaires et homogènes* en $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, et les solutions du problème s'obtiendront en égalant à zéro les $d - k_1$ premiers membres des $d - k_1$ équations de l'un quelconque de ces groupes.

Considérons les équations d'un des groupes : on en tirera la valeur

---

[1] Ces équations peuvent aussi s'écrire

$$f^{\frac{1}{r}}(e) = \frac{x_1^{\frac{q}{r}}(e)}{x_1^{\frac{q}{r}}(e')} e^{2s\frac{i\pi}{r}} f^{\frac{1}{r}}(e').$$

Cette forme nous sera utile plus loin.

de $d - k_1$ des constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en fonction linéaire et homogène des $m - d + k_1$ autres, et l'on aura ainsi

$$f(z) = \varphi(z)[\lambda_1 \varphi_1(z) + \ldots + \lambda_{m-d+k_1} \varphi_{m-d+k_1}(z)]^r,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-d+k_1}$ étant maintenant des constantes *arbitraires*.

En conséquence, l'équation générale des courbes appartenant au groupe considéré sera de la forme

$$0 = f(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1^r A_{r,0\ldots,0} + r\lambda_1^{r-1}\lambda_2 A_{r-1,1,\ldots 0} + \ldots + \lambda_{m-d+k_1}^r A_{0,\ldots 0,r}.$$

Les A sont des polynômes de degré q en x_1, x_2, x_3, qui, égalés à zéro, représentent des courbes de degré q passant par les k_1 points doubles et les k_2 points simples donnés sur la courbe S; on a

$$A_{r,0,\ldots 0}(z) = \varphi(z)\varphi_1^r(z),$$
$$A_{r-1,1,\ldots 0}(z) = \varphi(z)\varphi_1^{r-1}(z)\varphi_2(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

39. On peut donc énoncer les résultats suivants :

Soit

$$nq = 2k_1 + k_2 + rl, \qquad q \geqq n - 2.$$

Les courbes de degré q, qui passent par k_1 points doubles et k_2 points simples donnés sur une courbe S, *de degré n et de genre p, et qui ont avec cette courbe en l points un contact d'ordre $r - 1$, se divisent en r^{2p} systèmes : pour les courbes d'un même système, les l points de contact avec* S *forment des groupes équivalents.*

Chaque système se divise en r^{d-k_1} groupes, et l'équation générale des courbes d'un même groupe est de la forme

$$(18) \qquad \lambda_1^r A_{r,0,\ldots 0} + r\lambda_1^{r-1}\lambda_2 A_{r-1,1,\ldots 0} + \ldots + \lambda_{m-d+k_1}^r A_{0,\ldots r} = 0,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ désignent des constantes arbitraires, et où l'on a posé

$$m = l - p + 1 + \rho,$$

ρ étant l'indice du système des groupes équivalents formés par les l points de contact des courbes considérées.

40. *Remarque I.* — Il résulte de l'équation (18) que, pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait

$$m - d + k_1 \geqq 1,$$

c'est-à-dire

$$l + \rho + k_1 \geqq p + d.$$

En général, si les points donnés sur S sont choisis arbitrairement, les groupes équivalents formés par les points de contact des courbes d'un même système ne sont pas spéciaux et l'on a

$$\rho = 0.$$

La condition ci-dessus devient alors

$$l + k_1 \geqq p + d.$$

On peut déduire de ce qui précède la proposition suivante :

Soit g un groupe quelconque de l points, situés sur une courbe S *de genre p, à d points doubles : une courbe quelconque de degré q ayant avec* S *en ces l points un contact d'ordre $r - 1$ coupe, en outre, la courbe en k_1 points doubles et k_2 points simples. Inversement, par ces $k_1 + k_2$ points, on peut faire passer r^{d-k_1} groupes de courbes de degré q, ayant respectivement avec* S *des contacts d'ordre $r - 1$ en l points formant un groupe équivalent à g. L'équation générale des courbes d'un groupe est de la forme* (18) *et renferme*

$$l - p - d + k_1$$

paramètres arbitraires.

Si le groupe g est un groupe spécial d'indice ρ, le nombre de ces paramètres est augmenté de ρ.

Cette proposition est une généralisation de celle du n° **23** sur les propriétés des groupes spéciaux.

41. *Remarque II.* — Si q est égal ou supérieur à n, on ajoutera au second membre de l'équation (18) le produit SR_{q-n}, où R_{q-n} désigne un polynôme quelconque de degré $q - n$ en x_1, x_2, x_3.

42. *Remarque III.* — Si q est inférieur à $n-2$, les équations (17) seront au nombre de $nq - \frac{1}{2}(q+1)(q+2) - k_1 - p + 1$ (n° **35**); il n'y aura ainsi, dans chaque système, que

$$r^{nq - \frac{1}{2}(q+1)(q+2) - k_1 - p + 1}$$

groupes de courbes de contact.

En particulier, pour $q = n - 3$, ce nombre devient r^{d-k_1-1} [1].

43. *Remarque IV.* — Si la courbe S a des points de rebroussement, il convient de modifier légèrement les énoncés précédents.

Supposons que, parmi les $d - k_1$ points doubles par lesquels ne passent pas les courbes de contact considérées, il y ait R points de rebroussement, d'arguments $e_1, e_2, \ldots, e_R$.

L'équation (14) relative à l'un de ces points devient (**35**)

$$f'(e_1)x_1(e_1) = qf(e_1)x'_1(e_1),$$

---

[1] On doit remarquer que, si q est inférieur à $n-3$, le problème des courbes de contact est généralement impossible. En effet, pour qu'il soit possible, il faut, comme on le voit aisément en appliquant la méthode du n° 40, qu'on ait

$$(i') \qquad l - p + \rho - nq + \tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) + k_1 + p \geqq 1.$$

Or on a

$$nq = 2k_1 + k_2 + rl;$$

la plus grande valeur de l, toutes choses égales d'ailleurs, correspond à la plus petite valeur de r, soit $r = 2$; si l'on fait cette hypothèse dans la relation précédente, l'inégalité (i) entraîne la suivante

$$\rho - \frac{nq}{2} + \frac{1}{2}(q+1)(q+2) - \frac{k_2}{2} \geqq 1$$

et, *a fortiori*, en supprimant $\frac{k_2}{2}$,

$$2\rho + q(q - n + 3) \leqq 0.$$

En général, $\rho = 0$, et l'on doit avoir par suite $q \geqq n - 3$.

c'est-à-dire, puisque l'on a

$$f(z) = \varphi(z)(\lambda_1 F^{(1)} + \ldots + \lambda_m F^{(m)})^r = \varphi(z)\psi^r(z),$$

$$0 = \psi^{r-1}(e_1)\left[\varphi'(e_1)\psi(e_1) + r\varphi(e_1)\psi'(e_1) - q\frac{x_1'(e_1)}{x_1(e_1)}\varphi(e_1)\psi(e_1)\right];$$

$\psi(e_1)$ ne peut être nul que si la courbe $f = 0$ passe par le point de rebroussement (e_1), ce qu'on ne suppose pas; en égalant à zéro la quantité entre crochets, on trouve une relation linéaire et homogène en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

On conclut de là que le nombre des groupes que comprend un des r^{2p} systèmes de courbes de contact est égal à

$$r^{d-R-k_1} \quad \text{si} \quad q \geqq n-2$$

et à

$$r^{nq-\frac{1}{2}(q+1)(q+2)-k_1-p-R+1} \quad \text{si} \quad q < n-2.$$

PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES DE POINTS DE CONTACT.

44. On peut donner, relativement à la distribution des points où les courbes de contact touchent la courbe considérée, quelques propositions simples, qui sont l'extension de quelques résultats énoncés par Clebsch dans le cas où les courbes de contact sont des courbes adjointes.

Ces recherches mettront en évidence l'existence d'une classe de fonctions uniformes intéressantes, et dont l'étude est liée à celle des fonctions fuchsiennes.

Soient deux courbes de contact appartenant à un même système, $f = 0$ et $f_1 = 0$. On a

$$f(z) = \varphi(z)[\lambda_1 F^{(1)} + \lambda_2 F^{(2)} + \ldots]^r = \varphi(z)\psi^r(z),$$

$$f_1(z) = \varphi(z)[\mu_1 F^{(1)} + \mu_2 F^{(2)} + \ldots]^r = \varphi(z)\psi_1^r(z);$$

$\varphi = 0$ est l'équation d'une quelconque des courbes du système considéré, ψ et ψ_1 sont des fonctions fuchsiennes ayant mêmes infinis.

La fonction $\left(\frac{f_1}{f}\right)^{\frac{1}{r}}$, c'est-à-dire $\frac{\psi_1}{\psi}$, est donc une fonction fuchsienne,

dont les zéros et les infinis sont respectivement les arguments des l points de contact de S avec les courbes f et f_1.

Cherchons ce que devient la fonction $\left(\frac{f_1}{f}\right)^{\frac{1}{r}}$ dans le cas où $f_1 = 0$ est une courbe de contact appartenant à un autre système que la courbe $f = 0$. Soit posé, pour abréger,

$$\bar{\mathcal{F}}_1(z) = \left[\frac{f_1(z)}{f(z)}\right]^{\frac{1}{r}},$$

La fonction $\bar{\mathcal{F}}_1^r(z)$ est uniforme dans l'intérieur du cercle fondamental; je dis qu'il en est de même de la fonction $\bar{\mathcal{F}}_1(z)$.

En effet, les zéros de $f(z)$ [ou $f_1(z)$] sont : 1° les k zéros communs à $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$, chacun au degré q de multiplicité; 2° les $2k_1 + k_2$ arguments qui correspondent aux points fixes de S par lesquels passent les courbes de contact de la famille considérée; 3° les arguments des l points de contact de $f = 0$ [ou $f_1 = 0$] et de S, chacun au degré r de multiplicité.

Il résulte de là que les zéros et les infinis de la fonction $\frac{f_1(z)}{f(z)}$ sont tous d'un degré de multiplicité égal à r, et par conséquent la fonction $\bar{\mathcal{F}}_1(z)$ reste monodrome dans le domaine de l'un quelconque des points correspondants; elle est donc uniforme dans l'intérieur du cercle fondamental.

D'un autre côté, on a, en désignant par $\left(z, \frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right)$ une quelconque des $2p$ substitutions fondamentales du groupe G, générateur des fonctions fuchsiennes considérées

$$\frac{f_1}{f}\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \frac{f_1}{f}(z)$$

et, par suite,

$$\bar{\mathcal{F}}_1\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \bar{\mathcal{F}}_1(z)\, e^{2h_j \frac{i\pi}{r}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p),$$

h_j étant un entier, qui est évidemment unique et déterminé quand la substitution $\left(z, \frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right)$ est donnée.

Si l'on remplace la courbe $f_1 = 0$ par une autre courbe de contact, $f'_1 = 0$ appartenant au même système, on a une nouvelle fonction

$$\mathcal{F}'_1(z) = \left[\frac{f'_1(z)}{f(z)}\right]^{\frac{1}{r}},$$

et je dis qu'elle satisfait aux relations

$$\mathcal{F}'_1\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \mathcal{F}'_1(z)\, e^{2h_j \frac{i\pi}{r}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p),$$

où h_j est le même que pour la fonction $\mathcal{F}_1(z)$; le quotient $\frac{\mathcal{F}'_1(z)}{\mathcal{F}_1(z)}$, c'est-à-dire $\left[\frac{f'_1(z)}{f_1(z)}\right]^{\frac{1}{r}}$, est en effet une fonction fuchsienne de groupe G, d'après ce qui a été dit plus haut, puisque les courbes $f'_1 = 0$ et $f_1 = 0$ appartiennent au même système.

Considérons maintenant une courbe de contact $f_2 = 0$ appartenant à un nouveau système; et soit $\mathcal{F}_2(z) = \left[\frac{f_2(z)}{f(z)}\right]^{\frac{1}{r}}$ la fonction correspondante. On a

$$\mathcal{F}_2\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \mathcal{F}_2(z)\, e^{2g_j \frac{i\pi}{r}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Je dis que la suite $(g_1, g_2, \ldots, g_{2p})$ diffère de la suite $(h_1, \ldots, h_{2p})$; s'il en était autrement, la fonction uniforme

$$\frac{\mathcal{F}_2(z)}{\mathcal{F}_1(z)} = \left[\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right]^{\frac{1}{r}}$$

serait en effet une fonction fuchsienne de groupe G, et l'on aurait, en désignant par $\beta_1, \ldots, \beta_l$ les arguments des points de contact de S et de f_1, par $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ ceux des points de contact de S et de f_2,

$$\int_{\beta_1}^{\gamma_1} \theta_i(z)\, dz + \ldots + \int_{\beta_l}^{\gamma_l} \theta_i(z)\, dz = h\omega_i + h'\omega'_i + \ldots$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p).$$

Les groupes $(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ et $(\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ seraient alors équivalents, ce qui est impossible, puisque les courbes $f_2 = 0$ et $f_1 = 0$ font partie de deux systèmes de contact différents (**58**).

Il résulte de là que, si l'on considère successivement les r^{2p} systèmes de courbes de contact, on forme r^{2p} systèmes de fonctions $\bar{\mathfrak{F}}(z)$, satisfaisant aux relations

$$\bar{\mathfrak{F}}\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \bar{\mathfrak{F}}(z)\, e^{2h_j \frac{i\pi}{r}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p),$$

et pour chacun de ces r^{2p} systèmes, les suites $(h_1, h_2, \ldots, h_{2p})$ sont différentes. Or le nombre de suites différentes qu'on peut former en donnant à $h_1, \ldots, h_{2p}$ les valeurs $0, 1, \ldots, r-1$ est précisément égal à r^{2p} : on voit ainsi qu'il existe un système de fonctions $\bar{\mathfrak{F}}(z)$ satisfaisant à des relations de la forme précédente, où $h_1, \ldots, h_{2p}$ sont des entiers *choisis arbitrairement*.

45. Nous pouvons par suite énoncer le théorème algébrique suivant :

Soit G *un groupe fuchsien, dérivant de* $2p$ *substitutions* (¹). *On peut former des fonctions uniformes dans l'intérieur du cercle fondamental,* $\bar{\mathfrak{F}}(z)$ *satisfaisant aux relations*

$$\bar{\mathfrak{F}}\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \bar{\mathfrak{F}}(z)\, e^{2h_j \frac{i\pi}{r}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2p),$$

où $\left(z, \frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right)$ *est une quelconque des substitutions fondamentales du groupe* G, *et où* h_j *est un entier choisi arbitrairement.*

Les considérations géométriques qui précèdent mettent en évidence l'existence et la forme de pareilles fonctions : toutes les fonctions de même nature s'obtiennent d'ailleurs en multipliant l'une des précédentes par une fonction fuchsienne quelconque, de groupe G.

(¹) Il s'agit toujours, bien entendu, des groupes G qui donnent naissance à un polygone R_0 de la nature indiquée au n° 2.

46. Au point de vue géométrique, on peut déduire de ce qui précède quelques conséquences intéressantes.

Soient $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_r = 0$, r courbes de contact quelconques, appartenant *aux systèmes*

$$(h_1, h_2, \ldots h_{2p}), \quad (g_1, g_2, \ldots g_{2p}), \quad \ldots, \quad (l_1, l_2, \ldots l_{2p}),$$

c'est-à-dire telles qu'on ait

$$\left.\begin{array}{l} \left[\dfrac{f_1}{f}\left(\dfrac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right)\right]^{\frac{1}{r}} = \left[\dfrac{f_1}{f}(z)\right]^{\frac{1}{r}} e^{2h_j \frac{i\pi}{r}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[\dfrac{f_r}{f}\left(\dfrac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right)\right]^{\frac{1}{r}} = \left[\dfrac{f_r}{f}(z)\right]^{\frac{1}{r}} e^{2l_j \frac{i\pi}{r}}, \end{array}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, 2p),$$

et considérons la fonction

$$\Phi(z) = f_1^{\frac{1}{r}}(z) f_2^{\frac{1}{r}}(z) \ldots, f_r^{\frac{1}{r}}(z).$$

On peut écrire

$$\Phi(z) = f(z)\left(\frac{f_1}{f}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{f_2}{f}\right)^{\frac{1}{r}} \cdots \left(\frac{f_r}{f}\right)^{\frac{1}{r}},$$

et, sous cette forme, on voit que $\Phi(z)$ est une fonction uniforme, sans infinis dans l'intérieur du cercle fondamental, et satisfaisant, puisque $f(z)$ est une fonction thêtafuchsienne de degré μq, aux relations

$$\Phi\left(\frac{\lambda_j z + \mu_j}{\nu_j z + \varpi_j}\right) = \Phi(z)(\nu z + \varpi)^{2\mu q} e^{2(h_j + g_j + \ldots + l_j)\frac{i\pi}{r}}.$$

Au point de vue analytique, on est ainsi en présence d'une fonction holomorphe, analogue aux fonctions thêtafuchsiennes sans infinis, et il est clair, d'après ce qui précède, qu'on peut choisir la fonction $f_r(z)$ de façon que, quelles que soient $f_1(z), \ldots, f_{r-1}(z)$, la quantité

$$h_j + g_j + \ldots + l_j$$

ait, suivant le module r, une valeur entière quelconque ($j = 1, 2, \ldots, 2p$).

On peut, en particulier, étant donnés les systèmes auxquels appar-

tiennent les courbes $f_1 = 0, \ldots, f_{r-1} = 0$, choisir le système auquel appartient la courbe $f_r = 0$ de façon que $\Phi(z)$ soit une fonction thêta-fuchsienne holomorphe.

Nous dirons en ce cas que les *r systèmes*

$$(h_1, h_2, \ldots, h_{2p}), \quad (g_1, g_2, \ldots, g_{2p}), \quad \ldots, \quad (l_1, l_2, \ldots, l_{2p})$$

sont *complémentaires*. Les conditions à vérifier sont pour cela

$$\begin{aligned} h_1 + g_1 + \ldots + l_1 &\equiv h_2 + g_2 + \ldots + l_2 \equiv \ldots \\ &\equiv h_{2p} + g_{2p} + \ldots + l_{2p} \equiv 0 \pmod{r}. \end{aligned}$$

On peut alors (§ VII) énoncer la proposition suivante :

Soient r courbes de contact appartenant à r systèmes complémentaires : par leurs points de contact avec S, *les points fixes donnés sur cette courbe, et* $2(p-1)$ *points simples de* S *situés sur une courbe adjointe quelconque* P, *d'ordre* $n-3$, *on peut mener une courbe adjointe* Φ *d'ordre* $n+q-3$.

Les tangentes menées aux courbes Φ et P, en l'un quelconque des points doubles de S, présentent une propriété intéressante.

Supposons en effet que les courbes $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_r = 0$ appartiennent respectivement, dans les systèmes complémentaires dont elles font partie, *aux groupes* $(s_1, s_2, \ldots, s_{d-k_1})$, $(t_1, t_2, \ldots, t_{d-k_1})$, $\ldots$, $(v_1, v_2, \ldots, v_{d-k_1})$, c'est-à-dire que l'on ait (note du n° **58**)

$$\left.\begin{aligned} f_1^{\frac{1}{r}}(e_i) &= \frac{x_1^{\frac{q}{r}}(e_i)}{x_1^{\frac{q}{r}}(e_i')} e^{2s_i \frac{i\pi}{r}} f^{\frac{1}{r}}(e_i'), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_r^{\frac{1}{r}}(e_i) &= \frac{x_1^{\frac{q}{r}}(e_i)}{x_1^{\frac{q}{r}}(e_i')} e^{2v_i \frac{i\pi}{r}} f^{\frac{1}{r}}(e_i'), \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, d-k_1);$$

on en tire

$$\Phi(e_i) = \frac{x_1^q(e_i)}{x_1^q(e_i')} e^{2(s_i + t_i + \ldots + v_i)\frac{i\pi}{r}} \Phi(e_i').$$

Cette relation peut recevoir une interprétation géométrique ana-

logue à celle qui a été donnée au § XI; en prenant pour axes $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$ les tangentes à S au point double (e_i, e'_i), et en supposant que les équations des tangentes en ce point aux courbes Φ et P soient respectivement

$$x_2 + a_i x_3 = 0, \qquad x_2 + b_i x_3 = 0;$$

on voit comme au n° **31** que la relation qui précède donne

$$\frac{a_i}{b_i} = e^{2(s_i + t_i + \ldots + v_i)\frac{i\pi}{r}}.$$

En d'autres termes :

Les points de contact avec S *de* r *courbes appartenant à des systèmes complémentaires et faisant partie de groupes déterminés, sont situés, avec les points fixes donnés, et les* $2(p-1)$ *points simples où* S *est traversée par une courbe adjointe quelconque* P *d'ordre* $n-3$, *sur une courbe adjointe* Φ *d'ordre* $n+q-3$: *le rapport anharmonique du faisceau formé par les tangentes à la courbe* S *en un de ses points doubles, et les tangentes en ce même point aux courbes* Φ *et* P, *est égal à une des racines* $r^{\text{ièmes}}$ *de l'unité, et il reste fixe quand les courbes de contact considérées varient sans cesser d'appartenir aux systèmes et aux groupes primitivement fixés.*

On peut toujours, étant donnés les groupes auxquels appartiennent dans leurs systèmes, supposés toujours complémentaires, les courbes $f_1 = 0, \ldots, f_{r-1} = 0$, choisir le groupe de la courbe $f_r = 0$, de façon qu'on ait

$$s_i + t_i + \ldots + v_i \equiv 0 \pmod{r}; \qquad (i = 1, 2, \ldots, d - k_1),$$

et l'on a en ce cas

$$\Phi(e_i) = \frac{x_1^q(e_i)}{x_1^q(e'_i)}\,\Phi(e'_i).$$

Les points de contact des r courbes considérées sont alors situés, avec les points fixes, sur une courbe de degré q (n° **33**).

Nous dirons en ce cas que les *groupes* $(s_1, s_2 \ldots, s_{d-k_1})$, $(t_1, \ldots, t_{d-k_1})$, $\ldots$, $(v_1, v_2, \ldots, v_{d-k_1})$ sont *complémentaires*.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Les points de contact de r courbes appartenant à des systèmes et à des groupes complémentaires sont situés, avec les points fixes, sur une courbe de degré q.

En particulier :

Les points de contact de r courbes appartenant à un même système et à un même groupe sont situés, avec les points fixes, sur une courbe de degré q.

Il résulte également de là que :

Si par les points de contact de $r-1$ courbes quelconques de la famille considérée et par les points fixes, on mène une courbe de degré q, cette courbe coupe S *en l nouveaux points, qui sont les points de contact d'une $r^{\text{ième}}$ courbe de la même famille. Le système et le groupe auxquels appartient cette courbe restent fixes quand les systèmes et les groupes auxquels appartiennent respectivement les $r-1$ premières courbes restent fixes eux-mêmes. Si les $r-1$ premières courbes appartiennent à un même système, la $r^{\text{ième}}$ courbe appartiendra à ce système.*

47. L'équation de la courbe qui passe par les points fixes et les points de contact de r courbes du même système et du même groupe est facile à former.

Soient $f_1 = 0, \ldots, f_r = 0$ ces courbes.

On a

$$f_1(z) = \varphi(z)(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_{m-d+k_1}\varphi_{m-d+k_1})^r,$$
$$f_2(z) = \varphi(z)(\mu_1\varphi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^r,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_r(z) = \varphi(z)(\varpi_1\varphi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^r.$$

La fonction $\Phi(z)$ a ici pour expression

$$\Phi(z) = \varphi(z)(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots)\ldots(\varpi_1\varphi_1 + \ldots).$$

En développant le second membre et remplaçant, comme au n° **38**,

$$\begin{array}{lll} \varphi(z)\varphi_1^r(z) & \text{par} & A_{r,0,\ldots 0}, \\ \varphi(z)\varphi_1^{r-1}(z)\varphi_2(z) & \text{par} & A_{r-1,1,\ldots 0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{array}$$

on obtiendra le premier membre de l'équation cherchée

$$0 = \lambda_1\mu_1\ldots\varpi_1 A_{r,0\ldots 0} + (\lambda_2\mu_1\ldots\varpi_1 + \lambda_1\mu_2\ldots\varpi_1 + \ldots + \lambda_1\mu_1\ldots\varpi_2)A_{r-1,1,\ldots 0} + \ldots$$
$$+ \lambda_{m-d+k_1}\mu_{m-d+k_1}\ldots\varpi_{m-d+k_1} A_{0,0,\ldots r}.$$

48. Dans le cas où les courbes de contact de degré q ne passent par aucun point fixe donné sur S, on a

$$rl = nq.$$

Supposons qu'on ait aussi

$$r'l = nq',$$

r' et q' étant des entiers inférieurs à r et à q.

Soient $f_1 = 0, \ldots, f_{r'} = 0$, r' courbes de contact quelconques; posons

$$\Phi'(z) = f_1^{\frac{1}{r}}(z) f_2^{\frac{1}{r}}(z)\ldots f_{r'}^{\frac{1}{r}}(z).$$

La fonction $f_1(z)f_2(z)\ldots f_{r'}(z)$ a pour zéros : 1° chacun des zéros communs à $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$ au degré qr' ou $q'r$ de multiplicité; 2° chacun des arguments des points de contact de S et des courbes de $f_1 = 0, \ldots f_{r'} = 0$, au degré r de multiplicité : il en résulte que $\Phi'(z)$ est une fonction uniforme, et l'on démontre comme plus haut les propositions suivantes :

Si par les points de contact de $r'-1$ courbes quelconques de la famille considérée on mène une courbe de degré q', cette courbe coupe S *en l nouveaux points qui sont les points de contact d'une $r'^{\text{ième}}$ courbe de la même famille.*

Le système et le groupe auxquels appartient cette courbe restent fixes quand les systèmes et les groupes auxquels appartiennent respectivement les $r'-1$ premières courbes restent fixes eux-mêmes.

CAS PARTICULIERS.

49. Supposons que les courbes de contact de degré q ne passent par aucun point fixe donné sur S, de sorte qu'on ait

$$rl = nq.$$

Admettons de plus que

$$q = q's,$$
$$r = r's,$$

s étant un entier, et r' et q' étant premiers entre eux.

Il est clair qu'on aura une courbe de contact de degré q, ayant avec S en l points un contact d'ordre $r-1$, en prenant une courbe de degré q', ayant en l points un contact d'ordre $r'-1$, et en comptant cette courbe s fois.

Soit $\varphi = 0$ l'équation d'une telle courbe de degré q'; désignons par $\beta_1, \ldots, \beta_l$ les arguments de ses points de contact avec S, et par $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ ceux des points de contact avec S d'une courbe de degré q.

On aura (§ III)

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_i(z)\,dz + \ldots + \int_{\alpha_l}^{\beta_l} \theta_i(z)\,dz = \frac{1}{r}(h\omega_i + h'\omega'_i + \ldots).$$

Si nous considérons le *système* de courbes pour lequel

$$h = h' = \ldots = 0,$$

on aura, $f = 0$ étant l'équation d'une d'entre elles,

$$f(z) = \varphi^s(z)\psi^r(z)$$

ou

$$f(z) = \varphi^s(z)\psi^{r's}(z),$$

$\psi(z)$ étant une fonction fuchsienne d'ordre l, ayant pour infinis $\beta_1, \ldots, \beta_l$ (n° **38**).

On a, de plus,

$$\varphi^s(e_i)\psi'^s(e_i) = \frac{x_1^{q's}(e_i)}{x_1^{q's}(e'_i)}\varphi^s(e'_i)\psi'^s(e'_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, d);$$

ou

$$(19) \qquad \varphi(e_i)\psi'(e_i) = \frac{x_1^{q'}(e_i)}{x_1^{q'}(e'_i)}\varphi(e'_i)\psi'(e'_i)e^{2t_i\frac{i\pi}{s}}.$$

Considérons celles de ces équations qui correspondent à

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_d = 0.$$

La fonction $\varphi(e_i)\psi'(e_i)$ est évidemment une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré $\mu q'$, admettant comme zéro de multiplicité q' chacun des k zéros communs à $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$: les relations précédentes expriment donc que les autres zéros de cette fonction sont les arguments de points de S situés sur une courbe de degré q'. En d'autres termes, la courbe $f = 0$ est une courbe de degré q' comptée s fois.

Les relations précédentes, où $t_1 = \ldots = t_d = 0$ peuvent s'écrire, en extrayant les racines $r'^{\text{ièmes}}$,

$$(20) \qquad \varphi^{\frac{1}{r'}}(e_i)\psi(e_i) = \frac{x_1^{\frac{q'}{r'}}(e_i)}{x_1^{\frac{q'}{r'}}(e'_i)}\varphi^{\frac{1}{r'}}(e'_i)\psi(e'_i)e^{2v_i\frac{i\pi}{r'}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, d).$$

Il en résulte que, parmi les r^d groupes de courbes que comprend le système considéré, il en est r'^d qui ne renferment que des courbes de degré q' comptées s fois; le nombre des groupes de degré q indécomposables, comprises dans le système considéré, se réduit ainsi à $r^d - r'^d$.

Mais il peut se présenter un cas important où ces résultats se modifient : c'est celui où q' est inférieur à $n - 2$.

En ce cas, il suffit que $nq' - \frac{1}{2}(q'+1)(q'+2) - p + 1$ des équations (19), où l'on a fait $t_1 = t_2 = \ldots = 0$, soient vérifiées pour que les zéros de $\varphi(z)\psi'(z)$, autres que les zéros communs de $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$, soient les arguments de points de S situés sur une courbe de

degré q' (n° **55**); et, par suite, à tout groupe de d équations de la forme (19), pour lequel $nq' - \frac{1}{2}(q'+1)(q'+2) - p + 1$ au moins des entiers t seront nuls, correspondront des courbes de degré q' comptées s fois.

Le nombre de ces groupes est, comme on le voit aisément, égal à

$$1 + d(s-1) + \frac{d(d-1)}{1.2}(s-1)^2 + \ldots + \frac{d(d-1)\ldots(\lambda+1)}{1.2\ldots(d-\lambda)}(s-1)^{d-\lambda},$$

en posant, pour abréger,

$$\lambda = nq' - \tfrac{1}{2}(q'+1)(q'+2) - p + 1$$

et

$$d = \tfrac{1}{2}n(n-3) - p + 1.$$

Chaque groupe d'équations (19) donnant naissance à r'^d groupes d'équations (20), on voit ainsi que le système considéré renferme un nombre de groupes de courbes de contact indécomposables de degré q égal à

$$N = r^d - r'^d\left[1 + d(s-1) + \frac{d(d-1)}{1.2}(s-1)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{d(d-1)\ldots(\lambda+1)}{1.2\ldots(d-\lambda)}(s-1)^{d-\lambda}\right].$$

Les autres groupes de ce système ne comprennent que des courbes de degré q' comptées s fois. Si λ est nul ou négatif, il est clair qu'on aura $N = 0$.

COURBES DE DEGRÉ $n-3$ TANGENTES A S EN TOUS LEURS POINTS DE RENCONTRE AVEC CETTE COURBE.

51. Cherchons le nombre des courbes du degré $n-3$ qui passent par k_1 points doubles de S et qui touchent cette courbe en tous leurs autres points de rencontre avec elle.

Il résulte du théorème général du n° **58** et de la remarque du n° **42** qu'*il y a 2^{2p} systèmes de telles courbes; les points de contact des courbes d'un même système forment des groupes équivalents.*

Chaque système comprend 2^{d-k_1-1} *courbes, de sorte qu'il existe en tout* 2^{2p+d-k_1-1} *courbes répondant à la question.*

On a, sur les systèmes de points de contact, des théorèmes analogues à ceux du n° **46**.

On voit, comme au n° **49**, que ces résultats se modifient si k_1 est nul et si $n-3$ est pair, c'est-à-dire si n est impair.

Soit $n-3=2\nu$, $k_1=0$.

Parmi les systèmes des courbes de degré $n-3$ *tangentes à* S *en tous leurs points de rencontre avec cette courbe, il en est un pour lequel les groupes des points de contact sont équivalents au groupe de* $\frac{(n-3)n}{2}$ *points situés sur une courbe de degré* ν.

Ce système ne comprend que N_1 *courbes indécomposables de degré* $n-3$, *étant posé*

$$N_1 = 2^{d-1} - \left[1 + (d-1) + \frac{(d-1)(d-2)}{1.2} + \ldots + \frac{(d-1)\ldots(\lambda'+1)}{1.2\ldots(d-\lambda'-1)}\right]$$

et

$$\lambda' = \frac{3n^2-12n+1}{8} - p + 1.$$

Il comprend, de plus, toutes les courbes de degré $\frac{n-3}{2}$ comptées deux fois.

Pour λ' nul ou négatif, on aura

$$N_1 = 0.$$

52. *Remarque.* — Ces résultats cessent d'être exacts si la courbe de degré $n-3$ doit passer par tous les points doubles de $S(d=k_1)$, car les équations (17) du n° **38** n'existent plus, et les équations (16) se réduisent à $p-1$ d'entre elles (n° **9**). En ce cas, les quantités h, h', ... qui figurent dans ces équations ne sont pas indépendantes, et le nombre des systèmes de courbes de contact est inférieur à r^{2p}.

APPLICATION AUX COURBES DU QUATRIÈME DEGRÉ.

53. Il est aisé de voir que les formules qui précèdent s'appliquent au cas qui semble échapper à la méthode de $p=0$.

Nous pouvons donc énoncer, pour toutes les courbes du quatrième degré, les propositions relatives aux systèmes de coniques quadritangentes.

I. *Courbes du quatrième degré sans point singulier. — Il y a 64 systèmes de coniques tangentes à la courbe en 4 points :* l'un de ces systèmes ne comprend que des droites comptées deux fois.

L'équation générale des coniques comprises dans l'un des 63 autres systèmes est de la forme

$$\lambda_1^2 A + 2\lambda_1\lambda_2 B + \lambda_2^2 C = 0, \tag{21}$$

λ_1 et λ_2 étant des constantes arbitraires.

Les points de contact de deux coniques du même système sont sur une conique.

II. *Courbe S du quatrième degré à un point double (e). — Il y a 16 systèmes de coniques de contact : chaque système comprend deux groupes de coniques,* et l'équation générale des courbes d'un groupe est de la forme (21). Toutefois, l'un des systèmes ne comprend que des droites, comptées deux fois.

Il n'y a donc, en réalité, que 30 *groupes de coniques de contact* (¹).

Les points de contact de deux coniques de même système et du même groupe sont sur une conique.

Par les points de contact de deux coniques du même système et de groupes différents, on peut mener un faisceau de cubiques qui ont, comme neuvième point commun, le point double e.

Une quelconque de ces cubiques, C, coupe en outre la courbe S en deux nouveaux points, déterminant une droite D qui passe par le point e. En ce point, la tangente à C est la conjuguée harmonique de D par rapport aux deux tangentes de la courbe S.

III. *Courbe S du quatrième degré à deux points doubles. — Il y a*

(¹) Et non 31, comme il est dit dans les *Leçons sur la Géométrie* de Clebsch, trad. Benoist, t. III, p. 278.

quatre systèmes de coniques de contact; trois d'entre eux renferment quatre groupes, et l'équation générale des courbes d'un des groupes est de la forme (21). Le dernier système ne comprend qu'un groupe de coniques proprement dites et renferme en outre les droites du plan, comptées deux fois. Il n'y a donc, en réalité, que 13 *groupes de coniques de contact.*

Les quatre points de contact d'une conique du dernier groupe sont sur une conique qui passe par les deux points doubles e_1 et e_2, et touche en chacun d'eux la conjuguée harmonique de la droite e_1e_2 par rapport aux deux tangentes menées à S *en ce point.*

Les points de contact de deux coniques du même système et du même groupe sont sur une conique.

Dans un même système, on peut distinguer les quatre groupes, suivant la notation du numéro, par les symboles (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) (n° **46**).

Les points de contact de deux coniques appartenant à un même système et aux deux groupes (α, β) *et* (α', β') *sont situés, avec les points doubles e_1 et e_2, sur une cubique* C.

Cette cubique touche au point e_1 la droite e_1e_2, si $\alpha + \alpha'$ est pair, et la conjuguée harmonique de e_1e_2 par rapport aux deux tangentes de S *en e_1, si $\alpha + \alpha'$ est impair.*

De même elle touche au point e_2 la droite e_1e_2, si $\beta + \beta'$ est pair, et la conjuguée harmonique de e_1e_2 par rapport aux tangentes de S *en e_2, si $(\beta + \beta')$ est impair.*

IV. *Courbe* S *du quatrième degré à trois points doubles. — Il n'y a qu'un seul système de coniques de contact; il renferme huit groupes de coniques,* et l'équation générale des courbes d'un groupe est de la forme (21). Toutefois, quatre de ces groupes ne comprennent que des droites comptées deux fois : il n'y a donc en réalité que *quatre groupes de coniques de contact* [1].

---

[1] Et non 7, comme il est dit dans les *Leçons sur la Géométrie* (*ibid.*, p. 306). Les trois groupes, désignés dans ce passage par les symboles (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), ne comprennent que des droites comptées deux fois.

Les points de contact de deux coniques appartenant à un même groupe sont sur une conique.

54. On peut donner des résultats analogues pour les cubiques osculatrices en quatre points à une courbe du quatrième degré. Nous ne les énoncerons que pour les courbes sans points doubles et les courbes à un point double.

Courbe S du quatrième degré sans point singulier. — Il y a 729 *systèmes de cubiques osculatrices à la courbe en quatre points :* l'un de ces systèmes ne comprend que des droites comptées trois fois. L'équation générale des cubiques comprises dans l'un des 728 *autres systèmes* est de la forme

$$\lambda_1^3 A + 3\lambda_1^2 \lambda_2 B + 3\lambda_1 \lambda_2^2 C + \lambda_2^3 D = 0, \tag{22}$$

λ_1 et λ_2 étant des constantes arbitraires.

Toute cubique menée par les points de contact de deux cubiques coupe S en quatre nouveaux points qui sont les points d'osculation d'une autre cubique : le système auquel appartient cette dernière reste fixe si les systèmes auxquels appartiennent respectivement les deux premières cubiques restent fixes.

Les douze points de contact de trois cubiques d'un même système sont sur une cubique.

Toute conique menée par les points de contact d'une cubique coupe S en quatre nouveaux points, qui sont les points d'osculation d'une autre cubique : le système auquel appartient cette dernière courbe reste fixe quand le système auquel appartient la première reste fixe (n° **48**).

Courbe S du quatrième degré à un point double, e. — Il y a 81 *systèmes de cubiques osculatrices en quatre points : chaque système comprend* 3 *groupes,* et l'équation générale des courbes d'un des groupes est de la forme (22). Toutefois, l'un des systèmes, que nous désignerons par la notation (0, 0, 0, 0) ne comprend que des droites comptées trois fois.

Il n'y a donc en réalité que 240 *groupes de cubiques de contact.*

Désignons les systèmes par les symboles (a, b, c, d) et les groupes par les symboles (α) : a, b, c, d, α pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2 (n° **46**).

Soient trois cubiques appartenant respectivement aux systèmes

$$(a_1, b_1, c_1, d_1), \qquad (a_2, b_2, c_2, d_2),$$
$$(3 - a_1 - a_2, 3 - b_1 - b_2, 3 - c_1 - c_2, 3 - d_1 - d_2),$$

et aux groupes

$$(\alpha_1), \quad (\alpha_2), \quad (\alpha_3).$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0 \pmod 3$, les douze points d'osculation des trois cubiques sont sur une même cubique.

Dans le cas contraire, on pourra par ces points et le point double e mener un faisceau de courbes du quatrième ordre : l'une quelconque de ces courbes, C, coupe S en deux nouveaux points qui déterminent une droite D, passant par e. Le rapport anharmonique du faisceau formé par la tangente en e à la courbe C, les tangentes au même point à S, et la droite D, est égal à $e^{\frac{2i\pi}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$: il est donc équianharmonique.

Les douze points d'osculation de trois cubiques du même système et du même groupe sont sur une cubique.

Toute cubique menée par les points d'osculation de deux cubiques quelconques coupe S *en quatre nouveaux points qui sont les points d'osculation d'une nouvelle cubique : le système et le groupe auxquels appartient cette dernière restent fixes si le système et le groupe auxquels appartiennent les deux premières restent fixes eux-mêmes.*

Les points de contact de deux cubiques appartenant respectivement aux systèmes

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \quad \text{et} \quad (3 - a_1, 3 - b_1, 3 - c_1, 3 - d_1),$$

et aux groupes

$$(\alpha_1) \quad \text{et} \quad (3 - \alpha_1),$$

sont sur une conique.

Toute conique menée par les points d'osculation d'une cubique coupe S *en quatre nouveaux points qui sont les points d'osculation d'une autre cubique; le système et le groupe auxquels appartient cette dernière restent fixes si le système et le groupe auxquels appartient la première restent fixes eux-mêmes.*

CONIQUES TANGENTES EN CINQ POINTS A UNE COURBE DU CINQUIÈME DEGRÉ.

55. Nous ferons une application des résultats du n° 51 aux courbes du cinquième degré.

Courbe du cinquième degré à un point double (¹). — *Il y a* 1023 *coniques touchant la courbe en cinq points.*

Courbe du cinquième degré à deux points doubles. — *Les coniques tangentes en cinq points se répartissent en* 256 *systèmes; chaque système comprend deux coniques,* sauf un qui ne comprend que des droites comptées deux fois. *Il y a donc* 510 *coniques de contact.*

Courbe du cinquième degré à trois points doubles. — *Les coniques de contact se répartissent en* 64 *systèmes; chaque système comprend* 4 *coniques,* sauf un qui ne comprend que des droites comptées deux fois. *Il y a donc* 252 *coniques de contact.*

Courbe du cinquième degré à quatre points doubles. — *Les coniques de contact se répartissent en* 16 *systèmes; les quinze premiers comprennent chacun* 8 *coniques, le dernier ne comprend qu'une conique proprement dite. Par les cinq points de contact de cette conique et les quatre points doubles on peut faire passer un faisceau de cubiques : l'une quelconque de ces courbes* C *coupe en outre la courbe du cinquième degré en deux points, situés, avec les points doubles, sur une conique* H. *Les tangentes menées en un quelconque des points doubles aux courbes* C *et* H *sont conjuguées harmoniques*

(¹) Suivant la remarque du n° 53, les formules qu'on y a données ne s'appliquent pas au cas de la courbe sans point double, puisque $d = k_1 = 0$.

par rapport aux tangentes menées à la courbe du cinquième degré en ce point.

Il y a en tout 121 *coniques de contact.*

Courbe du cinquième degré à cinq points doubles. — Les coniques de contact se répartissent en 4 *systèmes;* 3 *d'entre eux comprennent chacun* 16 *coniques; le dernier ne comprend que* 5 *coniques proprement dites. Par les cinq points de contact de l'une de ces coniques et les cinq points doubles on peut faire passer une cubique* C. *Les tangentes menées en quatre des points doubles à la courbe* C *et à la conique* H *des points doubles sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes de la courbe du cinquième degré au point considéré. Au cinquième point double, les courbes* C *et* H *se touchent.*

Il y a en tout 53 *coniques de contact.*

Courbe du cinquième degré à six points doubles. — Il y a 16 *coniques de contact.*

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES COURBES DE CONTACT.

56. Comme dernière application de la théorie des courbes de contact, nous donnerons quelques propriétés géométriques applicables aux courbes d'un même groupe, quand leur équation générale renferme un paramètre arbitraire [1].

Soit

$$nq = 2k_1 + k_2 + rl$$

et

$$l - p - d + k_1 + \rho = 1.$$

Les courbes considérées sont celles de degré q qui passent par k_1 points doubles et k_2 points simples donnés sur S, et ont avec cette courbe en l points, formant un groupe d'indice ρ, un contact d'ordre $r - 1$.

---

[1] Nous avons signalé ces propriétés dans le cas où la courbe S est de genre 1.

L'équation générale des courbes d'un même groupe sera de la forme

$$\lambda_1^r A_r + r\lambda_1^{r-1}\lambda_2 A_{r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2}\lambda_1^{r-2}\lambda_2^2 A_{r-2} + \ldots + \lambda_2^r A_0 = 0.$$

Nous appellerons ces courbes, pour abréger, courbes A.

Soient r de ces courbes :

$$\begin{aligned} 0 = A &= \alpha^r A_r + r\alpha^{r-1} A_{r-1} + \ldots + A_0, \qquad \left(\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right), \\ 0 = B &= \beta^r A_r + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = L &= \lambda^r A_r + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

Les rl points de contact de ces courbes avec S sont (**46**) sur une courbe de degré q, qui passe par les points fixes donnés, et dont l'équation est (**47**)

$$0 = \alpha\beta\ldots\lambda A_r + (\alpha\beta\ldots + \ldots + \beta\ldots\lambda + \alpha\ldots\lambda + \ldots) A_{r-1} + \ldots + A_0.$$

Le coefficient de A_k est la somme des produits k à k des r quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Courbes A menées par un point du plan. — Soit (x'_1, x'_2, x'_3) un point du plan ; on peut mener, par ce point, r courbes A : les valeurs correspondantes du paramètre sont données par l'équation

$$0 = \alpha^r A'_r + r\alpha^{r-1} A'_{r-1} + \ldots + A'_0,$$

en posant

$$A'_k = A_k(x'_1, x'_2, x'_3).$$

Soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les racines de l'équation précédente : la somme de leurs produits k à k étant

$$(-1)^k \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{1.2\ldots k} \frac{A'_{r-k}}{A'_r},$$

la courbe de degré r qui passe par les points fixes et les rl points de contact des r courbes A menées par le point (x'_1, x'_2, x'_3) aura pour

équation

$$0 = A'_0 A_r - r A'_1 A_{r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2} A'_2 A_{r-2} + \ldots + (-1)^r A'_r A_0.$$

Le premier membre de cette équation ne change pas, ou change de signe, suivant que r est pair ou impair, quand on permute x_1, x_2, x_3 et x'_1, x'_2, x'_3.

Cela posé, appelons *courbe polaire* d'un point la courbe de degré q qui passe par les points fixes et les rl points de contact des r courbes A menées par le point. Ce point sera dit *pôle* de sa courbe polaire.

On a ce théorème :

Si la courbe polaire d'un point P *passe par un point* P′, *la courbe polaire de* P′ *passe par* P ;

et, par suite :

Les courbes polaires de tous les points d'une courbe polaire passent par le pôle de celle-ci.

Les pôles de toutes les courbes polaires passant par un point sont sur la courbe polaire de ce point.

Si r est impair, l'équation de la courbe polaire du point (x'_1, x'_2, x'_3) peut s'écrire

$$0 = (A'_0 A_r - A'_r A_0) + r(A'_1 A_{r-1} - A'_{r-1} A_1) + \ldots$$

et, par suite :

Si r est impair, toute courbe polaire passe par son pôle.

Ces résultats, y compris le dernier, s'appliquent en particulier aux cubiques osculatrices en quatre points à une courbe du quatrième degré.

XIII. — Des courbes hyperelliptiques.

57. On dit qu'une courbe S (de genre p et de degré n) est *hyperelliptique* quand il existe sur cette courbe un système simplement

infini de groupe g_2^1 formés de deux points : nous dirons que les deux points d'un groupe sont *conjugués*.

Le système en question est un système spécial, d'indice $\rho = p - 1$, puisque dans les formules du n° **19** il faut faire $h = 2$ et $r = 1$.

D'après le théorème de Riemann et Roch, les courbes adjointes à S d'ordre $n - 3$, qui passent par les deux points d'un groupe, forment un système $\rho - 1$, c'est-à-dire $p - 2$ fois infini; leur équation générale est donc de la forme

$$0 = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \ldots + a_{p-1} P_{p-1},$$

$a_1, \ldots$ étant des constantes arbitraires. En d'autres termes, les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré, qui s'annulent pour les arguments des deux points d'un groupe, ont pour expression

$$\theta(z) = a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2 + \ldots + a_{p-1} \theta_{p-1}.$$

Comme il n'y a que p fonctions thêtafuchsiennes du premier degré linéairement indépendantes, il résulte de là que :

Toute fonction thêtafuchsienne holomorphe du premier degré, qui s'annule pour l'argument d'un point, s'annule pour l'argument du point conjugué, et géométriquement :

Toute courbe adjointe d'ordre $n - 3$, qui passe par un point d'une courbe hyperelliptique, passe par le conjugué de ce point.

Une courbe adjointe d'ordre $n - 3$ passant par deux points conjugués coupe en outre S en $2(p - 2)$ points, par lesquels on peut, d'après le théorème de Roch et Riemann, faire passer un faisceau de courbes adjointes d'ordre $n - 3$. Soient θ_1 et θ_2 les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré qui correspondent à deux courbes de ce faisceau : la fonction fuchsienne $\frac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)}$ n'a que deux infinis dans l'intérieur du polygone générateur; elle est donc d'ordre deux.

On peut dire, d'après cela, que :

Pour que deux fonctions fuchsiennes de même groupe G *soient liées par une relation hyperelliptique, $f = 0$, il faut et il suffit*

qu'une des fonctions fuchsiennes du même groupe soit du second ordre.

La condition est suffisante, car, $F(z)$ étant cette fonction, les deux zéros de l'équation $F(z) = \text{const.}$ déterminent sur la courbe $f = 0$ un système de groupes g_2^1.

Équation générale et enveloppe des droites joignant deux points conjugués.

58. Une droite $f = 0$ joignant deux points conjugués coupe S en $n - 2$ autres points, déterminant un groupe dont la multiplicité est en général $n - p - 2$: il en résulte qu'en désignant par $\varphi = 0$ l'équation d'une droite analogue, on aura (n° **37**)

$$f(z) = \varphi(z)[\alpha_1 F_1^{(1)} + \alpha_2 F_1^{(2)}][\beta_1 F_2^{(1)} + \beta_2 F_2^{(2)} + \ldots + \beta_{n-p-1} F_2^{(n-p-1)}],$$

$F_1^{(1)}$, $F_1^{(2)}$ étant des fonctions fuchsiennes d'ordre deux, $F_2^{(1)}, \ldots, F_2^{(n-p-1)}$ des fonctions fuchsiennes d'ordre $n - 2$ ayant respectivement mêmes infinis. Ces infinis sont pour les F_1 les arguments des deux points conjugués situés sur la droite $\varphi = 0$, pour les F_2, ceux des $n - 2$ autres points de S situés sur cette droite.

Les constantes α et β seront liées par $n - p - 1$ relations de la forme (n° **37**)

$$\beta_1(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2) + \beta_2(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2) + \ldots = 0,$$

$m_1, n_1, \ldots$ étant des constantes. De ces $n - p - 1$ relations, on tirera les valeurs proportionnelles des β

$$\frac{\beta_1}{f_1} = \frac{\beta_2}{f_2} = \ldots,$$

$f_1, f_2, \ldots$, étant des polynômes homogènes de degré $n - p - 2$ en α_1, α_2. On aura ainsi, sous forme symbolique,

$$f(z) = (\alpha_1, \alpha_2)(f_1, f_2, \ldots).$$

Dans le second membre, α_1 et α_2 entrent donc au degré $n - p - 1$,

et l'équation générale des droites joignant deux points conjugués sera de la forme

$$0 = x_1 \varphi_{n-p-1} + x_2 \psi_{n-p-1} + x_3 \chi_{n-p-1},$$

$\varphi, \ldots$ étant des polynômes homogènes de degré $n-p-1$ en α_1, α_2.

Donc :

Les droites qui joignent deux points conjugués sur une courbe hyperelliptique, de degré n et de genre p, enveloppent une courbe unicursale de classe $n-p-1$ et de degré $2(n-p-2)$ en général.

59. Cette courbe, comme nous l'avons fait voir dans le cas des courbes de genre un, touche S en un certain nombre de points, que nous allons déterminer. Pour abréger, nous désignerons par *droites* D les droites joignant deux points conjugués.

Les valeurs proportionnelles de α_1 et α_2 qui correspondent aux $n-p-1$ droites D qu'on peut mener par un point de S, d'argument z, vérifient l'équation

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = f(z) = \varphi(z)[\alpha_1 F_1^{(1)}(z) + \alpha_2 F_1^{(2)}(z)] \\ \times [f_1 F_2^{(1)}(z) + \ldots + f_{n-p-1} F_2^{(n-p-1)}(z)]. \end{aligned} \right.$$

$f_1, f_2, \ldots$ sont les valeurs proportionnelles trouvées plus haut pour β_1, $\beta_2, \ldots$. Cette équation admet d'abord la solution

$$\alpha_1 = F_1^{(2)}(z), \quad \alpha_2 = -F_1^{(1)}(z),$$

qui correspond à la droite joignant le point z à son conjugué.

Remarquons maintenant que les points de S situés sur l'enveloppe des droites D sont tels que l'équation précédente ait deux racines égales en $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, et, en ces points, l'enveloppe touche la droite D qui correspond à la racine double. Or, parmi ces points, figurent ceux dont les arguments sont tels que les deux facteurs entre crochets dans le second membre de (23) aient deux racines égales, c'est-à-dire tels qu'on ait

$$\begin{aligned} 0 = f_1 [F_1^{(2)}(z) - F_1^{(1)}(z)] F_2^{(1)}(z) + \ldots \\ + f_{n-p-1} [F_1^{(2)}(z) - F_1^{(1)}(z)] F_2^{(n-p-1)}(z) = 0. \end{aligned}$$

Soit z_0 une solution de cette équation : la droite D_0, qui joint le point z_0 à son conjugué, coupe S en des points dont les arguments vérifient la relation

$$(24)\quad 0 = \varphi(z)[\alpha_1^0 F_1^{(1)}(z) + \alpha_2^0 F_1^{(2)}(z)][f_1(\alpha_1^0, \alpha_2^0) F_2^{(1)}(z) + \ldots],$$

α_1^0 et α_2^0 étant liés par l'équation

$$\alpha_1^0 F_1^{(1)}(z_0) + \alpha_2^0 F_1^{(2)}(z_0) = 0.$$

Or la fonction

$$f(\alpha_1^0, \alpha_2^0) F_2^{(1)}(z) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$f[F_1^{(2)}(z_0), -F_1^{(1)}(z_0)] F_2^{(1)}(z) + \ldots,$$

s'annule, par hypothèse, pour $z = z_0$: les deux facteurs entre crochets du second membre de l'équation (24) s'annulent donc séparément pour $z = z_0$, et par suite la droite D_0 est tangente à S au point z_0.

Il en résulte que la courbe enveloppe des droites D touche S aux points dont les arguments vérifient l'équation

$$(25)\quad \begin{cases} 0 = f_1[F_1^{(2)}(z), F_1^{(1)}(z)] F_2^{(1)}(z) + \ldots \\ \qquad + f_{n-p-1}[F_1^{(2)}(z), -F_1^{(1)}(z)] F_2^{(n-p-1)}(z). \end{cases}$$

Les F_1 sont des fonctions fuchsiennes d'ordre deux; les F_2 des fonctions d'ordre $n-2$, ayant respectivement mêmes infinis; $f_1, f_2, \ldots$, des polynômes d'ordre $n-p-2$: il en résulte que le second membre de l'équation précédente est une fonction fuchsienne d'ordre

$$2(n-p-2) + n - 2 = 3n - 2p - 6,$$

et par suite :

La courbe enveloppe des droites qui joignent deux points conjugués sur une courbe hyperelliptique, de degré n et de genre p, touche cette courbe en $3n - 2p - 6$ points.

On peut dire de plus, en remarquant que les infinis du second membre de (25) sont : 1° les arguments des deux points conjugués

situés sur la droite $\varsigma = 0$, au degré $n - p - 2$ de multiplicité; 2° les arguments des $n - 2$ autres points de S situés sur cette droite, que :

Le groupe déterminé par les $3n - 2p - 6$ points de contact est équivalent au groupe formé par $n - p - 2$ couples de points conjugués quelconques, et les $n - 2$ points où la droite qui joint deux de ces points coupe de nouveau la courbe hyperelliptique.

COURBES DE GENRE DEUX.

60. Toute courbe de genre deux est hyperelliptique, car ses courbes adjointes d'ordre $n - 3$ sont en nombre simplement infini et n'ont avec elle que deux points mobiles d'intersection : ces deux points déterminent un système de groupes g_2^1.

La courbe la plus simple de genre deux est la *courbe du quatrième degré à un point double :* toute droite menée par ce point coupe en outre la courbe en deux points qui sont conjugués.

Les coordonnées des points d'une courbe S du quatrième degré à un point double peuvent se mettre sous la forme

$$x_1 = \Theta_1(z), \qquad x_2 = \Theta_2(z), \qquad x_3 = \Theta_3(z);$$

Θ_1, Θ_2, Θ_3 étant des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré trois, ayant deux zéros communs, α_1 et α_2 (¹) (§ VI).

Soient $\theta_1(z)$ et $\theta_2(z)$ les deux fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un : chacune d'elles a deux zéros dans le polygone générateur; et les deux zéros de toute fonction linéaire, de la forme

$$\lambda_1 \theta_1 + \mu_1 \theta_2,$$

sont les arguments de deux points conjugués de S (n° 4).

(¹) D'après la théorie générale, il semble qu'on pourrait aussi prendre pour x_1, x_2, x_3 des fonctions thêtafuchsiennes de degré deux. Mais, si l'on désigne par θ_1 et θ_2 les deux fonctions thêtafuchsiennes de degré un et de genre deux, celles de degré deux, qui sont au nombre de trois, se réduisent évidemment aux fonctions θ_1^2, $\theta_1\theta_2$ et θ_2^2 : la courbe décrite par le point x_1, x_2, x_3 serait alors une conique.

Proposons-nous de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que trois couples de points conjugués, dont les arguments vérifient respectivement les relations

$$\lambda_1\theta_1+\mu_1\theta_2=0,\qquad \lambda_2\theta_1+\mu_2\theta_2=0,\qquad \lambda_3\theta_1+\mu_3\theta_2=0;$$

soient, sur une conique, $f=0$.

On aura

$$f(z)=(\lambda_1\theta_1+\mu_1\theta_2)(\lambda_2\theta_1+\mu_2\theta_2)(\lambda_3\theta_1+\mu_3\theta_2)$$
$$\times[a_1\varphi(z)+a_2\varphi_2(z)+\ldots+a_5\varphi_5(z)]$$

ou

$$f(z)=(\alpha\theta_1^3+\beta\theta_1^2\theta_2+\gamma\theta_1\theta_2^2+\delta\theta_2^3)[a_1\varphi_1(z)+\ldots],$$

$\varphi_1,\ldots,\varphi_5$ désignant cinq fonctions thêtafuchsiennes de degré trois linéairement distinctes, $a_1,\ldots,a_5$ des constantes.

Pour que $f(z)$ soit une fonction du second ordre de $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$, ..., il faut d'abord qu'elle admette comme zéro double chacune des quantités α_1,α_2; ce qui donne, en annulant pour ces valeurs la fonction $a_1\varphi_1(z)+\ldots$ et sa dérivée, quatre relations linéaires en $a_1,\ldots,a_5$ qui déterminent les valeurs proportionnelles de ces quantités. Il reste ainsi

$$f(z)=\psi(z)(\lambda_1\theta_1+\mu_1\theta_2)\ldots(\lambda_3\theta_1+\mu_3\theta_2)$$

ou

$$f(z)=\psi(z)(\alpha\theta_1^3+\ldots+\delta\theta_2^3).$$

On écrira ensuite la relation

$$f(e):x_1^2(e)=f(e'):x_1^2(e'),$$

e, e' désignant les arguments qui correspondent au point double de S.

Cette équation est de la forme

$$a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta=0,$$

ou

$$a\lambda_1\lambda_2\lambda_3+b(\lambda_1\lambda_2\mu_3+\lambda_1\mu_2\lambda_3+\mu_1\lambda_2\lambda_3)$$
$$+c(\lambda_1\mu_2\mu_3+\mu_1\lambda_2\mu_3+\mu_1\mu_2\lambda_3)+d\mu_1\mu_2\mu_3=0,$$

a, b, c, d étant des constantes : c'est la relation cherchée entre les quantités λ et μ.

Remarquons qu'en tenant compte de la relation précédente mise sous la première forme, on peut écrire

$$f(z) = \psi(z)[\alpha\psi_1(z) + \beta\psi_2(z) + \gamma\psi_3(z)];$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont des fonctions thêtafuchsiennes de degré trois; α, β, γ des constantes arbitraires, et $\psi(z)$ une fonction thêtafuchsienne de degré trois, qui a, en outre des quantités α_1 et α_2 comptées deux fois, deux zéros, σ_1 et σ_2.

61. De là résultent les conséquences suivantes :

Les coniques qui traversent trois couples de points conjugués, sur une courbe du quatrième degré à un point double, passent par deux points fixes de cette courbe et forment une famille linéaire deux fois infinie.

On en déduit sans difficulté que la droite qui joint les points fixes, σ_1 et σ_2, coupe en outre la courbe en deux points qui sont situés respectivement sur les tangentes menées à S au point double.

Si l'on fait une perspective de la courbe S de manière à faire coïncider les deux points fixes avec les points cycliques du nouveau plan, et si l'on se souvient que la droite joignant deux points conjugués passe par le point double, on voit que :

La nouvelle courbe est anallagmatique par rapport à son point double.

En d'autres termes :

Toute courbe de quatrième degré du second genre, qui passe par les points circulaires à l'infini et a en outre pour directions asymptotiques celles des tangentes au point double, est anallagmatique par rapport à ce point.

Cette proposition se vérifie directement sans difficulté.

62. Nous n'insisterons pas plus longtemps sur cette théorie, nous nous bornerons à énoncer la proposition suivante, qui est une conséquence des théorèmes généraux sur les courbes de contact (n° **38**).

Il existe trois coniques, osculatrices, en deux points conjugués à une courbe du quatrième degré, de genre deux : les six points d'osculation sont sur une conique.

Ces quatre coniques passent d'ailleurs par les deux points σ_1 et σ_2.

63. *La courbe du cinquième degré, de genre deux,* a quatre points doubles : les coniques menées par ces points coupent en outre la courbe en deux points, qui sont conjugués.

D'après les résultats du n° **27**, il y a deux espèces de courbes de degré cinq et de genre deux.

64. Pour *les courbes de première espèce,* les coordonnées d'un point sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré trois, ayant un zéro commun.

Sur une telle courbe, S, trois couples de points conjugués sont toujours sur une cubique, passant par les quatre points doubles et coupant en outre la courbe en un point fixe a (n° **27**) : si nous considérons une droite D, menée par a, et coupant S aux points a, b, c, d, e, la cubique qui passe par les points b, c, d et leurs conjugués se décompose évidemment en une droite, qui est D, et une conique qui passe par les points doubles. Il en résulte qu'il y a nécessairement sur D deux couples de points conjugués ; en d'autres termes :

La droite qui joint deux points conjugués sur une courbe de cinquième degré, de genre deux et de première espèce, passe par un point fixe a, situé sur la courbe, qu'elle coupe en deux nouveaux points, également conjugués.

On démontrerait sans difficulté que :

Le point a est le point de concours de deux tangentes doubles, dont les deux points de contact avec la courbe du cinquième degré sont respectivement conjugués.

65. Pour *les courbes de seconde espèce*, les coordonnées d'un point sont des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré 4, ayant trois zéros communs α_1, α_2, α_3.

Les droites D *qui joignent deux points conjugués sur une courbe de seconde espèce enveloppent* (n^{os} **58** et **59**) *une conique qui touche la courbe en cinq points.* Le groupe déterminé par ces cinq points est équivalent à celui des points communs à S et à une des droites D (n° **59**); en d'autres termes (n° **24**), par ces cinq points et les quatre points doubles, on peut mener un nombre simplement infini de cubiques coupant en outre la courbe en deux points conjugués.

La conique enveloppe des droites D est donc celle que nous avons rencontrée au n° **55**.

Sur une courbe de seconde espèce, trois couples de points conjugués ne peuvent jamais être sur une cubique passant par les points doubles.

66. Proposons-nous d'étudier les coniques $f = 0$ qui traversent quatre couples de points conjugués. On a

$$f(z) = (\lambda_1\theta_1 + \mu_1\theta_2)\ldots(\lambda_4\theta_1 + \mu_4\theta_2)(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_7\varphi_7)$$

ou

$$f(z) = (\alpha\theta_1^4 + \beta\theta_1^3\theta_2 + \ldots + \varepsilon\theta_2^4)(a_1\varphi_1 + \ldots),$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_7$ étant sept fonctions thêtafuchsiennes holomorphes linéairement distinctes, de degré quatre. Pour que $f(z)$ soit une fonction du second ordre de $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$, il faut d'abord qu'elle admette comme zéro double chacune des quantités α_1, α_2, α_3 : ces conditions déterminent les valeurs proportionnelles de $a_1, \ldots, a_7$, et l'on a

$$f(z) = (\alpha\theta_1^4 + \ldots + \varepsilon\theta_2^4)\psi(z).$$

Il faut ensuite que $f(z)$ satisfasse à trois équations (n° **55**) de la forme

$$f(e_i) : x_1^2(e_i) = f(e_i') : x_1^2(e_i'),$$

(e_i, e_i') étant les arguments d'un des points doubles. Ces relations dé-

terminent γ, δ et ε en fonction linéaire homogène de α, β, et il reste

$$f(z) = \psi(z)(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2),$$

les constantes α et β étant arbitraires.

La fonction $\psi(z)$ a, outre les quantités α_1, α_2, α_3, comptées deux fois, deux autres zéros σ_1 et σ_2; il résulte, par suite de l'expression précédente, que :

Les coniques qui traversent quatre couples de points conjugués passent par quatre points fixes, dont deux sont situés sur la courbe du cinquième degré considérée; et, réciproquement, toute conique menée par ces quatre points coupe, en outre, la courbe en huit points mobiles, qui sont deux à deux conjugués.

On démontrerait de même que :

Les coniques menées par un des points doubles de la courbe, et traversant trois couples de points conjugués, passent par quatre points fixes, dont trois (y compris le point double) sont situés sur la courbe, et réciproquement.

Les coniques menées par deux points doubles et traversant deux couples de points conjugués passent par quatre points fixes situés sur la courbe, et réciproquement.

67. Dans ce dernier cas, en désignant par

$$\lambda_1\theta_1 + \mu_1\theta_2, \quad \lambda_2\theta_1 + \mu_2\theta_2$$

les fonctions qui ont pour zéros les arguments des deux couples de points conjugués, on a, entre les quantités μ et λ, une relation involutive de la forme

$$(26) \qquad a\lambda_1\lambda_2 + b(\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2) + c\mu_1\mu_2 = 0.$$

Les équations des deux droites qui joignent les deux points de ces couples sont de la forme (n° **58**)

$$0 = \lambda_1^2 A + 2\lambda_1\mu_1 B + \mu_1^2 C,$$
$$0 = \lambda_2^2 A + 2\lambda_2\mu_2 B + \mu_2^2 C,$$

et il résulte de la relation (26) que le point d'intersection de ces droites décrit la droite

$$aC + cA - 2bB = 0.$$

Donc :

Les droites qui joignent les points conjugués de deux couples situés sur une même conique, menée par deux points doubles donnés, se coupent sur une droite fixe.

On verrait de même que :

Les droites qui joignent les points conjugués de trois couples situés sur une même conique, menée par un point double donné, se coupent deux à deux sur une conique fixe.

68. *Les courbes du sixième degré,* de genre 2, présentent les mêmes particularités que celles du cinquième degré : elles sont de deux espèces, et l'on voit, comme plus haut, que sur une courbe de première espèce, la droite qui joint deux points conjugués passe par un point fixe, et que les quatre nouveaux points où elle coupe la courbe sont deux à deux conjugués. Sur une courbe de seconde espèce, la droite qui joint deux points conjugués enveloppe une courbe du quatrième degré, de troisième classe, tangente à la courbe en huit points.

XIV. — De quelques courbes spéciales.

69. Nous avons dû réserver, au n° **14**, pour une étude ultérieure, le cas où les coordonnées x_1, x_2, x_3 des points d'une courbe de genre p sont proportionnelles à des fonctions thètafuchsiennes du premier degré.

Nous distinguerons dans l'étude de ces courbes les deux cas suivants.

Dans les deux cas, x_1, x_2, x_3 sont trois fonctions thètafuchsiennes holomorphes de degré un ayant k zéros communs, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:

1° Il n'existe pas de système de groupes équivalents au groupe des quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:

2° Le groupe des quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ détermine un système de multiplicité r.

70. Les courbes des deux catégories jouissent d'une propriété importante qui les caractérise au point de vue géométrique.

Supposons que le groupe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ détermine un système de multiplicité r.

La courbe S, dont l'équation est $f = 0$, décrite par le point x_1, x_2, x_3, sera de degré $n = 2(p-1) - k$ et de genre p (n° **4**), et les fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un pourront toujours se mettre sous la forme (§ I)

$$\theta_i(z) = \frac{P_i(x_1, x_2, x_3)}{f'_{x_3}}\left(x_1 \frac{dx_2}{dx} - x_2 \frac{dx_1}{dz}\right).$$

Il existe $r+1$ fonctions thêtafuchsiennes de degré un, linéairement distinctes, s'annulant pour les $2(p-1) - k$ zéros de x_3 autres que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; cette proposition résulte de l'hypothèse et du théorème du reste.

Soient $x_3, \theta_1, \ldots, \theta_r$ ces fonctions. On aura, en vertu de l'expression précédente,

$$\frac{x_3}{P} = \frac{\theta_1}{P_1} = \frac{\theta_2}{P_2} = \cdots = \frac{\theta_r}{P_r},$$

$P, P_1, \ldots, P_r$ étant les premiers membres des équations de $r+1$ courbes de degré $n-3$, adjointes à la courbe S. Les zéros de $x_3, \theta_1, \ldots, \theta_r$ sont respectivement (§ I) les arguments des $2(p-1)$ points simples communs à S et aux courbes $P = 0, P_1 = 0, \ldots, P_r = 0$. Parmi ces points figurent donc les $2(p-1) - k$ points de S situés sur la droite $x_3 = 0$, et par suite chacune des courbes $P = 0, \ldots, P_r = 0$ se décompose en une droite $x_3 = 0$ et en une courbe de degré $n-4$. Comme la droite x_3 peut être une droite quelconque du plan, la courbe de degré $n-4$ est une courbe adjointe de S.

Il y aura ainsi $r+1$ courbes adjointes de degré $n-4$; $Q = 0$, $Q_1 = 0, \ldots, Q_r = 0$ et les premiers membres de leurs équations seront linéairement distincts, sinon il existerait une relation linéaire et homogène entre $x_1(z), \theta_1(z), \ldots, \theta_r(z)$, ce qui n'est pas. De même, il n'existe pas de courbe adjointe de degré $n-4$, $Q_{r+1} = 0$, dont l'équa-

tion ne rentre pas dans la forme $mQ + m_1 Q_1 + \ldots + m_r Q_r = 0$; $m, \ldots$ étant des constantes.

Les courbes $Q_i = 0$ coupent la courbe S aux points multiples et en k points dont les arguments forment un groupe équivalent au groupe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Dans le cas où le groupe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ ne détermine pas de système, il n'existe qu'une fonction thètafuchsienne holomorphe de degré un s'annulant pour les $2(p-1) - k$ zéros de $x_3(z)$, autres que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$; c'est la fonction $x_3(z)$ elle-même : si, en effet, il existait deux semblables fonctions $x_3(z)$ et $\theta(z)$, le groupe des zéros variables de la fonction $p_1 x_3(z) + p_2 \theta(z)$, qui est équivalent au groupe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ déterminerait un système de multiplicité un. Il en résulte qu'il n'y a qu'*une courbe adjointe de degré* $n - 4$; elle coupe la courbe $f = 0$ aux points multiples et aux k points d'arguments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

71. Les réciproques de ces propositions sont vraies et se démontrent de la même manière. On peut donc dire que :

Si une courbe de degré n et de genre p admet une famille linéaire r fois infinie de courbes adjointes d'ordre $n - 4$, les coordonnées des points de cette courbe sont proportionnelles à trois fonctions thètafuchsiennes du premier degré dont les zéros communs déterminent un système de multiplicité r, et réciproquement.

72. Cette théorie se lie étroitement à celle des systèmes spéciaux : je dis, en effet, que si le groupe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ détermine un système de multiplicité r, ce système est nécessairement spécial.

La proposition est évidente si k est inférieur à $p + 1$ (n° **20**); si l'on a $k > p + 1$, les $2(p-1) - k$ zéros variables de la fonction

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,$$

où a_1, a_2, a_3 sont des constantes, formeront un groupe qui appartiendra à un système de multiplicité 2 : ce système sera spécial, car la quantité

$$2 + p - 2(p-1) + k,$$

c'est-à-dire $k - p + 4$ est positive par hypothèse ; d'après le théorème de Riemann et Roch le groupe formé par les zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ communs à x_1, x_2, x_3 sera également un système spécial.

73. On peut tirer de là quelques conséquences relatives aux transformations unidéterminatives d'une courbe quelconque de genre p.

On sait que, parmi ces transformations, les plus intéressantes sont celles où l'on fait usage de courbes adjointes d'ordre $n - 3$: si C est une courbe quelconque, de genre p et de degré n, le point de la transformée C', de coordonnées ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, qui correspondra aux points ξ_1, ξ_2, ξ_3 de C sera donné par les relations

$$\begin{aligned}\xi'_1 &= P_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\\ \xi'_2 &= P_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\\ \xi'_3 &= P_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\end{aligned}$$

P_1, P_2, P_3 étant les premiers membres des équations de trois courbes de degré $n - 3$ adjointes à C.

Cette transformation est unidéterminative en général, parce que, inversement, les fonctions fuchsiennes $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ et $\frac{\xi_3}{\xi_1}$ sont fonctions rationnelles des fonctions fuchsiennes $\frac{\xi'_2}{\xi'_1}$ et $\frac{\xi'_3}{\xi'_1}$ (n° **5**, note).

Or $P_1(\xi_1, \ldots)$, $P_2(\xi_1, \ldots)$, $P_3(\xi_1, \ldots)$ sont proportionnels (n° **4**) à trois fonctions thêtafuchsiennes holomorphes du premier degré, et l'on en conclut, en s'appuyant sur les résultats précédents, les propositions suivantes :

Toute transformation unidéterminative d'une courbe C, de genre p et de degré n, à l'aide de courbes adjointes d'ordre $n - 3$ passant par k points simples de C, fait correspondre à cette courbe une courbe C' de genre p et de degré n', $[n' = 2(p - 1) - k]$, dont les points doubles sont une courbe de degré $n' - 4$ (¹).

(¹) Cette proposition constitue bien un théorème, car les points doubles de S' sont un nombre de $\frac{1}{2}(2p - k - 3)(2p - k - 4) - p$; le nombre des points qui

Ainsi, une courbe quelconque C, de genre quatre et de degré n, se transforme, à l'aide de courbes adjointes de degré $n-3$, n'ayant en dehors des points doubles aucun point commun sur C, en une courbe du sixième degré, dont les six points doubles sont sur une conique.

Une courbe de genre cinq devient, par une transformation analogue, une courbe du huitième degré, dont les seize points doubles sont sur une courbe du quatrième degré.

Plus généralement :

Toute transformation unidéterminative d'une courbe C de genre p et de degré n, à l'aide de courbes adjointes d'ordre $n-3$ passant par k points simples situés sur C et formant un groupe g, qui appartient à un système (spécial) *de multiplicité r, fait correspondre à cette courbe une courbe C′, de degré n', $[n' = 2(p-1)-k]$, qui admet une famille linéaire r fois infinie de courbes adjointes de degré $n'-4$.*

A k points de C formant un groupe équivalent à g correspondent, sur C′, k points situés sur une courbe adjointe de degré $n'-4$, et réciproquement.

Cette dernière proposition donne, au point de vue géométrique, une idée assez nette de la nature des groupes spéciaux sur une courbe algébrique.

Si $k=0$, la courbe adjointe de degré $2(p-1)-4$, qui passe par les points doubles de la courbe transformée de degré $2(p-1)$, ne coupe cette courbe qu'aux points singuliers, car on a identiquement

$$(2p-3)(2p-4)-2p=(2p-6)(2p-2).$$

Donc

Si x_1, x_2, x_3 sont trois fonctions thétafuchsiennes holomorphes

---

déterminent une courbe de degré $2p-k-6$ est d'ailleurs

$$\tfrac{1}{2}(2p-k-6)(2p-k-3),$$

et la différence de ces deux nombres est $p-3-k$.

de degré un n'ayant aucun zéro commun, la courbe S, *décrite par le point* x_1, x_2, x_3, *est de degré* $2(p-1)$: *ses points doubles sont une courbe adjointe de degré* $2(p-1)-4$, *qui ne la coupe qu'en ces points.*

74. Pour les courbes S, de degré n, qui admettent des courbes adjointes d'ordre $n-4$, les théorèmes du n° **16** sont remplacés par les suivants, qu'on démontrerait par une méthode analogue :

Soit C *une courbe adjointe à* S, *d'ordre* $n+q-4$ *passant par les points non singuliers communs à* S *et à une courbe adjointe d'ordre* $n-4$: *les arguments des autres points (non singuliers) où cette courbe coupe* S *annulent une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré* q, *dont les derniers zéros sont les quantités* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, *chacune au degré* q *de multiplicité.*

Inversement :

Soit $\Theta(z)$ *une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré* q, *admettant comme zéro multiple d'ordre* q *chacune des quantités* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$: *les autres zéros de cette fonction sont les arguments de points de* S *situés, avec les points simples où* S *est coupée par une courbe adjointe quelconque d'ordre* $n-4$, *sur une courbe adjointe d'ordre* $n+q-4$.

75. En partant de ces propositions, on peut répéter les raisonnements du § XI, en remplaçant simplement les courbes adjointes d'ordre $n-3$ de la théorie générale par des courbes adjointes d'ordre $n-4$; et les résultats géométriques du § XII subsistent sans modification.

Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans un premier Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 1885), j'ai commencé l'étude des intégrales de différentielles totales, relatives à une surface

$$f(x, y, z) = 0;$$

j'entends par là les intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int P\,dx + Q\,dy, \tag{1}$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x, y et z. Je m'étais uniquement occupé, dans ce travail, des intégrales de première espèce, c'est-à-dire des intégrales qui restent finies pour toute valeur des variables indépendantes.

J'ai continué cette étude, en m'occupant des intégrales de *seconde* espèce, que je définis comme il suit.

Considérons une suite continue fermée à *une* dimension de valeurs de x et y, telle de plus que les valeurs initiales et finales de z soient les mêmes; nous pouvons appeler *cycle* une telle suite. L'intégrale (1) sera dite de seconde espèce, *si l'intégrale prise le long de tout cycle infiniment petit est nulle.*

Il est évident alors que, en représentant par x_0, y_0 un système quel-

conque de valeurs de x et y, et posant

$$x = x_0 + \lambda(t), \qquad y = y_0 + \mu(t),$$

λ et μ étant des fonctions holomorphes quelconques de t dans le voisinage de $t = 0$ et s'annulant pour cette valeur, l'intégrale deviendra une fonction de t présentant, dans le voisinage de $t = 0$, le caractère d'une fonction algébrique, c'est-à-dire développable en série suivant les puissances entières ou fractionnaires de t avec un nombre limité de termes à exposant négatif.

Une première proposition fondamentale est la suivante :

Si la surface f est la plus générale de son degré, toute intégrale de seconde *espèce se réduit à une* fonction rationnelle *de x, y et z. Ainsi, en faisant abstraction des fonctions rationnelles des coordonnées, il n'y a pas, pour une surface quelconque, d'intégrale de seconde espèce; c'est ce que nous avions déjà rencontré pour les intégrales de première espèce.*

La question qui se pose alors est de reconnaître si une surface possède des intégrales de seconde espèce autres que des fonctions rationnelles. La question est bien plus difficile à résoudre que le problème analogue pour les intégrales de première espèce. Sa solution forme l'objet principal du deuxième Chapitre de ce Mémoire.

Dans le troisième Chapitre, je reviens sur les fonctions hyperabéliennes et hyperfuchsiennes, dont je me suis occupé précédemment dans différents Mémoires. On sait que toutes les fonctions de cette nature, correspondant à un groupe donné, peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de trois d'entre elles x, y, z, liées par une relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0.$$

Or une telle surface présente précisément ce caractère remarquable *de posséder en général des intégrales de seconde espèce*. Ceci m'a permis de répondre à la question suivante qui m'avait longtemps préoccupé.

Peut-on, avec les fonctions hyperfuchsiennes (ou hyperabéliennes),

engendrer toutes les fonctions algébriques de deux variables indépendantes, ou, ce qui revient au même, obtenir toutes les surfaces algébriques? La réponse, pour être *négative*, ne m'en semble pas moins présenter quelque intérêt.

Dans mon premier Mémoire, je m'étais borné au cas où les surfaces considérées ne présentaient que des singularités *ordinaires*. Dans une Lettre récente, M. Nœther veut bien me faire savoir que cette restriction peut être facilement levée. On trouvera d'ailleurs dans les *Sitzungsberichen* de la Société d'Erlangen (séance du 15 février 1886), une Note dans laquelle l'éminent géomètre expose brièvement la méthode dont il a fait usage. La même méthode de discussion s'appliquera évidemment aux intégrales de seconde espèce.

CHAPITRE PREMIER.

1. Nous allons tout d'abord nous placer dans un cas très simple, en examinant le cas où l'équation de la surface serait de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

f étant un polynôme.

La forme générale des intégrales de différentielle totale sera dans ce cas

$$(1) \qquad \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

P, Q et M étant des polynômes en x et y.

Quand, partant d'un système de valeurs initiales (x_0, y_0, z_0), le *chemin* d'intégration se termine en un *point* (x, y, z), les diverses valeurs que prend ainsi l'intégrale, quand le chemin varie, ne diffèrent que de quantités constantes; ce sont les périodes de l'intégrale. Considérons en particulier le cas où y resterait constant; l'intégrale se réduit à

$$(2) \qquad \int \frac{P\,dx}{M\sqrt{f(x, y)}};$$

les périodes de cette intégrale sont évidemment en même temps des

périodes de l'intégrale (1); par suite elles sont *constantes*, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de la valeur arbitraire donnée à y.

Cette remarque, si simple, va être fondamentale pour la suite; et nous allons immédiatement démontrer que si le polynôme $f(x, y)$ est arbitraire, c'est-à-dire le plus général d'un degré m, il ne peut exister d'autres intégrales de seconde espèce que les fonctions rationnelles de x, y et z. Donnons en effet à y une valeur arbitraire : l'équation

$$f(x, y) = 0 \tag{3}$$

aura m racines distinctes; si l'on considère x comme fonction de y, pour chaque valeur singulière de y, deux valeurs de x seulement deviendront égales. Soient, pour une valeur arbitraire et non singulière y_0 de y,

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m$$

les racines de l'équation (3). On peut les supposer rangées dans un ordre tel que, y allant de y_0 à une certaine valeur singulière y'_0 de y par un chemin convenable, x_1 et x_2 deviennent égales; puis ensuite, y allant de y_0 à une autre valeur singulière convenable, x_2 et x_3 deviendront égales, et ainsi de suite pour $x_3, x_4, \ldots, x_{m-1}, x_m$; y partant de y_0 et arrivant à la première de ces valeurs singulières, les racines varieront et deviendront

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_m,$$

et l'on aura

$$x'_1 = x'_2,$$

les autres racines étant distinctes.

Traçons dans le plan de la variable x un contour fermé simple C, partant d'un point arbitraire x_0 et revenant à ce point et assujetti aux conditions suivantes : il ne rencontre aucun des chemins décrits par les racines x quand y varie, comme il a été indiqué de y_0 à y'_0; il comprend seulement au début à son intérieur les deux racines x_1 et x_2, et, par suite, pour la valeur finale y'_0 de y, la seule racine double $x'_1 = x'_2$; il est possible de satisfaire à ces conditions.

Ceci posé, revenons à l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

dont les périodes, comme nous l'avons dit, ne dépendent pas de y.

Si nous faisons d'abord $y = y_0$, au contour C va correspondre une période de cette intégrale : je dis que cette période sera nulle. En effet, faisons varier y d'une manière continue, et par le chemin convenable, depuis y_0 jusqu'à y'_0; la valeur de la période ne change pas : voyons donc ce qu'elle devient à la fin.

Or, pour $y = y'_0$, le polynôme $f(x, y)$ a une racine double $x'_1 = x'_2$, qui est à l'intérieur du contour C, mais le point $x = x'_1$ ne peut être un point logarithmique pour l'intégrale

$$\int \frac{P(x, y'_0)\,dx}{M(x, y'_0)\sqrt{f(x, y'_0)}},$$

parce qu'alors l'intégrale (1) ne serait pas de seconde espèce. Donc l'intégrale, prise le long du contour C, est nulle, et, par suite, la période envisagée de l'intégrale (1) est également nulle, comme nous voulions l'établir. Il est d'ailleurs évident que toutes les périodes de cette intégrale peuvent être obtenues en employant des contours analogues à C; par suite, nous pouvons affirmer que les périodes de l'intégrale de différentielle totale de seconde espèce

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}}$$

sont nulles, *et l'on en conclut alors immédiatement que cette intégrale est une fonction rationnelle de x, y et $\sqrt{f(x, y)}$.*

2. Nous avons simplement voulu montrer, dans le paragraphe précédent, que toutes les intégrales de seconde espèce, attachées à la surface

$$z^2 = f(x, y),$$

étaient des fonctions algébriques, quand le polynôme $f(x, y)$ était le

plus général de son degré; mais on voit bien facilement un cas très étendu où la surface précédente n'aura pas d'intégrales de seconde espèce (autres, bien entendu, que les fonctions rationnelles de x, y, z), quoique le polynôme f puisse être très particulier.

Envisageons encore, à cet effet, l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

le polynôme f n'étant pas nécessairement, d'ailleurs, irréductible. A une valeur arbitraire y_0 de y correspondent m valeurs de x, x_1, x_2, ..., x_m, et considérons les valeurs de y, pour lesquelles l'équation précédente a une racine *double;* nous laissons par conséquent de côté les valeurs pour lesquelles il y aurait une racine d'un degré de multiplicité *supérieur à deux*. Désignons d'une manière générale par y'_0 une valeur de y pour laquelle l'équation a une racine double; deux cas pourront se présenter :

Ou bien on pourra disposer les racines

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m$$

de telle manière que, y allant de y_0 à une racine y'_0 par un chemin convenable, x_1 et x_2 deviennent égales, puis, y allant de y_0 à une racine y'_0, *une* des racines x_1 ou x_2 deviendra égale à x_3, et ensuite on pourra trouver un chemin tel de y vers une racine y'_0 que *une* des racines x_1, x_2, x_3 deviendra égale à la racine x_4, et ainsi de suite.

Ou bien cette disposition sera impossible, et alors les racines se partageront en un certain nombre r de groupes

$$G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_r,$$

tels que pour chacun de ces groupes on puisse réaliser la disposition qui vient d'être indiquée; dans ces conditions, une racine d'un groupe ne pourra devenir égale à une racine d'un autre groupe que pour une valeur de y à laquelle correspondra une racine triple au moins de l'équation

$$(1) \qquad f(x, y) = 0.$$

3. Ceci posé, il n'y aura certainement pas dans *le premier cas d'autres intégrales de seconde espèce que des fonctions algébriques de x, y et z*; on peut en effet répéter, sans y rien changer, ce qui a été dit au paragraphe précédent et montrer ainsi que toutes les périodes sont nulles. Dans le cas où le polynôme $f(x, y)$ serait irréductible, et où les lacets binaires fondamentaux relatifs à la fonction algébrique x de y définie par l'équation (1) proviendraient seulement de racines doubles, la première circonstance se trouvera évidemment réalisée.

Pour ce qui est du second cas, nous pouvons remarquer que le nombre des périodes ne pourra pas dépasser $r - 1$, r étant le nombre des groupes G; les périodes provenant de deux racines d'un même groupe sont en effet nulles, d'après le raisonnement employé plus haut, et il ne peut subsister que des périodes provenant de racines n'appartenant pas à un même groupe, ce qui fait par conséquent au plus $r - 1$.

4. Considérons maintenant le cas le plus général auquel peut être étendu le résultat trouvé pour les surfaces précédentes. Nous voulons montrer que, *pour la surface la plus générale*

$$f(x, y, z) = 0$$

de degré m, les intégrales de seconde espèce sont fonctions rationnelles de x, y, z.

Soient, en effet, une telle intégrale représentée par

$$\int \mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy,$$

où P et Q sont fonctions rationnelles de x, y, z; nous donnons à y une valeur arbitraire, mais fixe, et nous envisageons l'intégrale

$$\int \mathrm{P}\, dx.$$

On voit, en raisonnant comme au § **1**, que les périodes de cette intégrale abélienne de seconde espèce ne dépendent pas de y : cette remarque va nous conduire, comme précédemment, à la démonstration du théorème énoncé.

Considérons les deux relations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_z(x, y, z) = 0,$$

on peut les regarder comme définissant un point analytique (z, x), fonction algébrique de la variable y.

Il y aura certaines valeurs singulières de y pour lesquelles deux valeurs de (z, x), et deux seulement (le polynôme f étant le plus général de son degré) deviendront égales; soient, pour une valeur arbitraire et non singulière y_0 de y,

$$(z_1, x_1), \quad (z_2, x_2), \quad \ldots \quad (z_N, x_N)$$

les N déterminations de (z, x). On peut les supposer rangées dans un ordre tel que, y allant de y_0 à une certaine valeur singulière y'_0 de y,

$$(z_1, x_1) \quad \text{et} \quad (z_2, x_2)$$

deviennent égaux, puis ensuite y allant de y_0 à une autre valeur singulière convenable,

$$(z_2, x_2) \quad \text{et} \quad (z_3, x_3)$$

deviendront égaux, et ainsi de suite pour

$$(z_3, x_3) \quad \text{et} \quad (z_4, x_4), \quad \ldots, \quad (z_{N-1}, x_{N-1}) \quad \text{et} \quad (z_N, x_N);$$

y partant de y_0 et arrivant à la première de ces valeurs singulières y'_0, les points analytiques (z, x) varieront et deviendront

$$(z'_1, x'_1), \quad (z'_2, x'_2), \quad \ldots \quad (z'_N, x'_N),$$

et l'on aura

$$(z'_1, x'_1) = (z'_2, x'_2),$$

les autres valeurs étant distinctes.

Ceci posé, les points analytiques $(z_1, x_1), \ldots, (z_N, x_N)$, qui sont nécessairement des points de ramification de la fonction algébrique z

de x définie par l'équation

$$f(x, y_0, z) = 0,$$

doivent nécessairement jouir de la propriété suivante : on peut tracer dans le plan des x un contour simple enveloppant seulement les points x_1 et x_2, et tel qu'après un tour complet de la variable x le long de ce contour, *toute* racine z de l'équation précédente reprenne la même valeur.

Pour le démontrer, remarquons que l'équation entre x et z

$$f(x, y'_0, z) = 0$$

définit une courbe qui a au point

$$x = x'_1 = x'_2, \qquad z = z'_1 = z'_2$$

un point double dont les tangentes sont distinctes. Ceci est évident, en langage géométrique, car $y = y'_0$ représente un plan tangent à la surface, x et z du point de contact étant précisément x'_1 et z'_1.

Figurons maintenant dans le plan des x le point $x = x'_1 = x'_2$; quand y varie d'une manière continue de y'_0 à y_0 par le chemin indiqué, x'_1 vient en x_1 et x'_2 en x_2. Tout contour simple enveloppant les points x_1, x_2, x'_1, et n'étant traversé par aucun des chemins décrits par les autres racines (il est évidemment possible d'en former un) remplira la condition cherchée, car la remplissant pour $y = y'_0$, il la remplira pour toutes les valeurs considérées de y, de y'_0 à y_0.

Ces préliminaires indiqués, nous envisageons maintenant la surface de Riemann correspondant à la relation algébrique entre z et x

$$(1) \qquad f(x, y_0, z) = 0.$$

Nous allons tracer sur cette surface un système particulier de coupures. Prenons comme première coupure la ligne fermée a_1, dont nous venons de parler, tracée autour des points analytiques (x_1, z_1), (x_2, z_2); elle est évidemment une limite non complète et peut, par

suite, être prise comme coupure. Prenons comme seconde coupure a_2 une ligne fermée joignant, par rapport aux deux points (x_2, z_2), (x_3, z_3), le même rôle que a_1 par rapport aux deux premiers points critiques; nous pouvons d'ailleurs nous arranger de manière que a_2 rencontre a_1 en *un* point. On continuera ainsi en obtenant les coupures $a_3, a_4, \ldots, a_{\aleph-1}$; à chacune de ces coupures correspondra une période A, ces périodes n'étant pas toutes, d'ailleurs, nécessairement distinctes. De plus, toutes les périodes d'une intégrale abélienne de seconde espèce attachée à la courbe (I) seront réductibles à des sommes de multiples des périodes A, car toute ligne fermée tracée sur la surface de Riemann se ramènera à un point après avoir traversé une ou plusieurs fois un certain nombre de coupures A.

Prenons donc une des coupures a, soit a_i, et cherchons quelle peut être la valeur de la période correspondante; nous allons voir de suite qu'elle est nulle pour l'intégrale

$$\int P\,dx.$$

En effet, faisons, comme plus haut, varier y d'une manière continue de y_0 à y'_0, la période ne devra pas changer; or elle est nécessairement nulle pour $y = y'_0$, puisque les deux points de ramification (x_1, z_1) et (x_2, z_2) disparaissent.

Nous pouvons donc affirmer que les périodes de l'intégrale

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

sont nulles, et, par suite, comme nous l'avons énoncé, *cette intégrale est une fonction rationnelle de x, y, z.*

CHAPITRE II.

5. Le théorème qui précède conduit immédiatement à se poser la question suivante : Comment pourra-t-on reconnaître si une surface algébrique possède des intégrales de seconde espèce qui ne soient pas des fonctions rationnelles, et comment pourra-t-on obtenir ces inté-

grales quand elles existeront? Tels sont les problèmes importants et difficiles qui vont nous occuper dans ce Chapitre.

Prenons d'abord, comme nous l'avons fait dans la démonstration du précédent théorème, la surface

$$z^2 = f(x, y),$$

et soit l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

P, Q et M étant des polynômes en x et y. On a la condition d'intégrabilité

$$M\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x, y)\left[M\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + Q\frac{\partial M}{\partial x} - P\frac{\partial M}{\partial y}\right];$$

$M(x, y)$ sera le produit d'un certain nombre de facteurs

$$[A(x, y)]^\alpha [B(x, y)]^\beta \ldots [L(x, y)]^\lambda,$$

les polynômes A, B, ..., L étant irréductibles, et aucun d'eux, comme on peut le supposer, n'étant divisible par y. Soit d'abord le cas le plus simple où

$$M = A^\alpha(x, y)$$

la condition d'intégrabilité s'écrira

$$A(x, y)\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x, y)\left[A\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \alpha Q\frac{\partial A}{\partial x} - \alpha P\frac{\partial A}{\partial y}\right],$$

et supposons que $A(x, y)$ soit premier avec $f(x, y)$. On voit alors que

$$Q\frac{\partial A}{\partial x} - P\frac{\partial A}{\partial y}$$

est divisible par $A(x, y)$.

Ceci posé, considérons l'intégrale

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{A^\alpha\sqrt{f(x', y)}},$$

en y regardant y comme un paramètre.

On peut, comme il est bien connu, retrancher de $\frac{P(x,y)}{A^\alpha\sqrt{f(x,y)}}$ une expression de la forme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda\sqrt{f(x,y)}}{A^{\alpha-1}}\right],$$

λ étant un polynôme en x, telle que la différence ne contienne plus A au dénominateur qu'à la puissance $\alpha-1$. Le polynôme λ de x aura ses coefficients qui seront des fractions rationnelles de y. Nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\frac{\lambda(x,y)}{\varphi(y)},$$

λ et φ étant des polynômes. On aura alors nécessairement

$$P+(\alpha-1)\frac{\lambda(x,y)}{\varphi(y)}\frac{\partial A}{\partial x}f(x,y)=\frac{\mu(x,y)}{\varphi(y)}A(x,y),$$

et, comme $Q\frac{\partial A}{\partial x}-P\frac{\partial A}{\partial y}$ est divisible par A, il en résultera une identité de la forme

$$Q+(\alpha-1)\frac{\lambda(x,y)}{\varphi}\frac{\partial A}{\partial y}f(x,y)=\frac{\mu_1(x,y)}{\varphi(y)}A(x,y).$$

Retranchons maintenant de

$$\frac{P\,dx+Q\,dy}{A^\alpha\sqrt{f(x,y)}}$$

l'expression différentielle exacte

$$d\frac{\lambda(x,y)\sqrt{f(x,y)}}{\varphi(y)A^{\alpha-1}},$$

la différence sera évidemment de la forme

$$\frac{P_1\,dx+Q_1\,dy}{\psi(y)A^{\alpha-1}\sqrt{f(x,y)}}.$$

Nous avons ainsi diminué d'une unité le degré de A et introduit

seulement au dénominateur le polynôme $\psi(y)$. Nous pourrons évidemment continuer ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à une différentielle totale de la forme

$$\frac{P_{\alpha-1}\,dx + Q_{\alpha-1}\,dy}{\chi(y)\,A\sqrt{f(x,y)}};$$

puisque l'intégrale proposée est de seconde espèce, il est nécessaire que $P_{\alpha-1}$ et $Q_{\alpha-1}$ soient divisibles par $A(x,y)$, car cette différentielle nous conduirait, dans le cas contraire, à une intégrale de troisième espèce. Nous avons donc une intégrale de la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}},$$

après avoir extrait de la proposée une partie algébrique. P et Q sont des polynômes en x et y, et $\chi(y)$ est un polynôme dépendant seulement de y. La conclusion serait encore la même, on le voit aisément, si M avait plusieurs facteurs irréductibles au lieu d'un seul.

6. Considérons donc l'intégrale précédente, et, y étant regardé comme un paramètre, arrêtons-nous d'abord sur l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}};$$

on sait qu'en retranchant de cette intégrale la dérivée d'une expression de la forme

$$P_1(x)\sqrt{f},$$

on peut ramener le degré de P à être $m-2$, si m est, comme plus haut, le degré de f.

Ici les coefficients de $P_1(x)$ dépendront nécessairement de y, et ce seront évidemment des fractions rationnelles de y, dont le dénominateur sera $\chi(y)$. Écrivons donc cette dernière expression sous la forme

$$\frac{P_1(x,y)\sqrt{f(x,y)}}{\chi(y)},$$

où $P_1(x, y)$ est un polynôme. Considérons alors la différence

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}} - d\left[\frac{P_1(x,y)\sqrt{f(x,y)}}{\chi(y)}\right],$$

elle aura la forme, où nous gardons les mêmes notations,

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}},$$

avec cette circonstance capitale que $P(x, y)$ est au plus de degré $m-2$ en x.

La condition d'intégrabilité

$$\chi(y)\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x,y)\left[\chi(y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - P\frac{\partial \chi}{\partial y}\right]$$

montre de suite que $Q(x, y)$ sera, par rapport à x, de degré au plus égal à $m-1$.

Nous avons donc une intégrale où les degrés par rapport à x sont limités. Écrivons cette intégrale sous la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

où

$$P = a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2},$$
$$Q = b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1},$$

les a et les b étant des fonctions rationnelles de y.

Prenons maintenant la condition d'intégrabilité

$$(1) \qquad P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x} = 2f(x,y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

et soit

$$f(x,y) = x^m + \varphi_1(y)x^{m-1} + \ldots + \varphi_m(y).$$

Les deux membres de l'identité (1) vont être des polynômes en x de degré $2m-2$; nous aurons donc à égaler $2m-1$ coefficients à zéro,

et dans ces $(2m-1)$ équations figureront les $2m-1$ fonctions de y,

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{m-2}, \quad b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_{m-1}.$$

Pour faire la discussion de ces équations, supposons m impair et égal à $2p+1$.

En égalant d'abord à zéro dans l'identité (1) les coefficients de x^{2m-2}, x^{2m-3}, ..., x^{m-1}, nous obtenons m identités, qui nous permettent d'exprimer, de proche en proche,

$$b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_{m-1}$$

à l'aide des a et de leur dérivée première. Portant ces valeurs dans les $(m-1)$ autres identités que nous avons encore à écrire, et qui sont fournies par la considération des coefficients de x^{m-2}, x^{m-3}, ..., x_0, nous obtiendrons $(m-1)$ équations linéaires et homogènes entre

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{m-2}, \quad \frac{da_0}{dy}, \quad \frac{da_1}{dy}, \quad \ldots, \quad \frac{da_{m-2}}{dy},$$

les coefficients dans ces équations étant évidemment des polynômes en y. Nous trouvons donc un système de $(m-1)$ équations linéaires du premier ordre, auquel doivent satisfaire les $(m-1)$ fonctions rationnelles a_0, a_1, ..., a_{m-2}; on pourra en tirer a_1, a_2, ..., a_{m-2} exprimées linéairement au moyen de a_0 et de ses dérivées, et quant à a_0, il satisfera à une équation linéaire E d'ordre $m-1$, dont les coefficients seront des polynômes en y.

Nous nous trouvons donc ramenés à la question suivante : Après avoir formé l'équation linéaire d'ordre $2p$, à laquelle satisfait a_0, équation dont les coefficients sont des polynômes en y, nous devons chercher si l'on peut satisfaire à cette équation en prenant pour a_0 une fonction rationnelle de y. C'est là un problème que l'on sait résoudre.

Supposons donc que l'on ait trouvé une fonction rationnelle de y, satisfaisant à l'équation précédente; on en déduira, pour a_1, a_2, ..., a_{m-2}, des fonctions rationnelles de y, et par suite, pour b_0, b_1, ..., b_{m-1}.

7. Nous aurons donc ainsi une intégrale de différentielle totale; avant de discuter cette expression, nous avons à faire une remarque importante sur l'équation linéaire E d'ordre $2p$, dont il vient d'être question. Nous pouvons retrouver cette équation en nous servant de considérations bien différentes. Envisageons, à cet effet, l'intégrale

$$\int \frac{(a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2})\,dx}{\sqrt{f(x, y)}},$$

en considérant y comme un paramètre arbitraire, et $a_0, a_1, \ldots, a_{m-2}$ étant des fonctions pour le moment arbitraires de ce paramètre. Cette intégrale a nécessairement $2p$ périodes, et ces périodes dépendront de y. Cherchons à déterminer les $2p$ fonctions

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{m-2},$$

de telle manière que ces périodes soient indépendantes de y, et soient égales à des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}$. Pour une valeur arbitraire donnée à y, considérons $2p$ cycles donnant les $2p$ périodes, et soient

$$P_{1,i}, \quad P_{2,i}, \quad \ldots, \quad P_{2p,i}$$

les $2p$ périodes de l'intégrale

$$\int \frac{x^{m-i-1}\,dx}{\sqrt{f(x, y)}};$$

(i allant de 1 à $2p$); on aura les $2p$ équations

$$\begin{aligned}
a_0 P_{1,1} + a_1 P_{2,1} + \ldots + a_{m-2} P_{2p,1} &= \alpha_1, \\
a_0 P_{1,2} + a_1 P_{2,2} + \ldots + a_{m-2} P_{2p,2} &= \alpha_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0 P_{1,2p} + a_1 P_{2,2p} + \ldots + a_{m-2} P_{2p,2p} &= \alpha_{2p}.
\end{aligned}$$

On sait que le déterminant de ces équations n'est pas identiquement nul, car ce sont les périodes de $2p$ intégrales distinctes de seconde

espèce. On tirera donc de ces équations

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_1 Q_{1,1} + \alpha_2 Q_{2,1} + \ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,1}, \\ a_0 &= \alpha_1 Q_{1,2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m-2} &= \alpha_1 Q_{1,2p} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,2p}; \end{aligned}$$

les P et par suite les Q seront des fonctions de y, qui s'exprimeront évidemment par des intégrales définies.

Revenons maintenant à l'équation E; quand a_0 satisfait à cette équation, on peut déterminer les a et les b de manière à avoir une intégrale de différentielle totale

$$(1) \qquad \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

où $P = a_0 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2}$, mais alors il est manifeste que les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{(a_0 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2})\,dx}{\sqrt{f(x,y)}},$$

qui sont nécessairement des périodes de l'intégrale (1), ne dépendent pas de y.

On en conclut alors que *l'équation* E *a pour intégrale générale*

$$a_0 = \alpha_1 Q_{1,1} + \alpha_2 Q_{2,1} + \ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,1},$$

où les α *sont les constantes arbitraires.*

8. Nous avons dit que l'équation E était d'ordre $2p$; ce nombre est une limite supérieure de l'ordre de l'équation qui pourra être moindre. Considérons, pour une valeur donnée à i, les $2p$ périodes

$$P_{1,i}, \quad P_{2,i}, \quad \ldots, \quad P_{2p,i},$$

ce sont des fonctions de y. Elles ont déjà été étudiées, à ce point de vue, par M. Fuchs, dans un intéressant Mémoire qui fait partie du tome 71 du *Journal de Crelle*. Ces fonctions satisfont à une équa-

tion linéaire dont les coefficients sont des polynômes en y, et dont l'ordre d est au plus égal à $2p$. Les points singuliers de cette équation différentielle correspondent aux valeurs de y, pour lesquelles l'équation en x

$$f(x, y) = 0,$$

a des racines égales. Les $2p$ équations correspondant à $i = 1, 2, \ldots, 2p$ ont les mêmes points singuliers, et bien évidemment aussi le même groupe. L'équation E sera donc aussi d'ordre d, et ce nombre pourra être moindre que $2p$.

Ceci posé, supposons que l'équation E admette une intégrale rationnelle E_0, et discutons l'intégrale de différentielle totale correspondante

$$I = \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

qui se trouve alors déterminée. On sait, par les éléments, que cette intégrale peut se mettre sous la forme

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P(x, y)\,dx}{\sqrt{f(x, y)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{Q(x_0, y)\,dy}{\sqrt{f(x_0, y)}},$$

x_0 et y_0 étant arbitraires. Désignons d'une manière générale par b les valeurs de y, en nombre déterminé, pour lesquels l'équation en x

$$f(x, y) = 0$$

a deux ou plusieurs racines égales.

Les deux systèmes de valeurs finies de (x, y) pour lesquelles l'intégrale I, fonction des deux variables x et y, puisse devenir infinie sont ceux dans lesquels la valeur de y est égale à une quantité b. Considérons donc un tel système de valeurs

$$y = b, \qquad x = \alpha,$$

α n'étant pas égale à une racine multiple de l'équation

$$f(x, b) = 0.$$

En mettant en évidence la puissance de $(y-b)$ figurant au dénominateur des coefficients de P et Q, nous écrirons l'intégrale sous la forme

$$\frac{1}{(y-b)^\beta}\int_{x_0}^{x}\frac{P_1(x,y)\,dx}{\sqrt{f(x,y)}}+\int_{y_0}^{y}\frac{Q_1(x_0,y)\,dy}{(y-b)^\beta\sqrt{f(x_0\,y)}}.$$

Or la première expression ne présente aucune difficulté, aucun logarithme ne pouvant s'introduire, car l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x}\frac{P_1(x,y)\,dx}{\sqrt{f(x,y)}}$$

présentera, dans le voisinage de $x=\alpha$, $y=\beta$, le caractère d'une fonction algébrique, puisque α n'est pas racine ou est seulement racine simple de l'équation $f(x,b)=0$.

Considérons maintenant la seconde intégrale, qui ne dépend que de y; le point $y=b$ pourrait être un point critique logarithmique; la période polaire correspondante se calculera aisément, et l'on remarquera qu'elle ne dépend pas de la valeur de x_0, car les périodes de la seconde intégrale sont, comme nous l'avons déjà utilisé plus d'une fois, indépendantes de la valeur de x. On devra écrire que cette période polaire est nulle, et nous obtiendrons ainsi de nouvelles conditions qui devront nécessairement être remplies pour que l'intégrale soit de seconde espèce.

Les conditions précédentes étant remplies, l'intégrale

$$\int^{x,y}\frac{P\,dx+Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}}$$

aura certainement les caractères d'une fonction algébrique des deux variables indépendantes x et y, dans le voisinage de tout système de valeurs finies de x et y, sauf aux points $(x=a, y=b)$, que nous n'avons pas encore étudiés, où a désigne une racine multiple de l'équation

$$f(x,b)=0,$$

points qui sont nécessairement en nombre limité. Mais ces systèmes de

points en nombre limité ne donneront naissance à aucune difficulté. On voit, en effet, que l'intégrale prise le long d'un cycle fermé infiniment petit tracé dans le voisinage de ce point est nulle, car on peut toujours, par le cycle fermé, qui est à une dimension, faire passer un continuum à deux dimensions, ne contenant pas le point $x = a, y = b$. Il n'y aura alors sur ce continuum, à l'intérieur du cycle, aucun point singulier logarithmique de l'intégrale, donc elle sera nulle.

Ainsi, en résumé, nous savons reconnaître si la surface

$$z^2 = f(x, y)$$

admet des intégrales de différentielles totales de seconde espèce, et trouver les intégrales à l'aide desquelles on peut linéairement former toutes les autres, à une fonction algébrique près.

9. Il nous faut maintenant examiner le cas général d'une surface donnée par une équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Nous avons eu besoin, dans les paragraphes précédents, de nous servir des $2p$ intégrales de seconde espèce auxquelles on peut ramener toutes les autres. On ne fait pas généralement de pareilles réductions pour les intégrales abéliennes attachées à une courbe dont l'équation n'a pas la forme hyperelliptique. Il est donc indispensable d'ouvrir ici une parenthèse pour combler cette lacune.

Considérons la courbe algébrique d'ordre m

$$f(x, y) = 0,$$

pour laquelle nous supposons, comme on le fait habituellement dans la théorie des intégrales abéliennes, que les m directions asymptotiques sont distinctes et différentes de l'axe des y. On sait que les intégrales abéliennes attachées à cette courbe se ramènent aux deux types

$$(\mathrm{T}) \qquad \int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y}, \quad \int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a)^2 f'_y},$$

P et Q étant des polynômes. Nous allons d'abord supposer que la courbe proposée n'a pas de points doubles.

Considérons d'abord la seconde intégrale

$$(1) \qquad \int \frac{Q(x,y)\,dx}{(x-a)^{\alpha} f'_y},$$

la réduction de cette intégrale se fera immédiatement, si l'on suppose que la droite $x = a$ n'est pas tangente à la courbe. Je dis en effet qu'on peut alors retrancher de l'intégrale une expression de la forme

$$\frac{\lambda(x,y)}{(x-a)^{\alpha-1}},$$

où $\lambda(x,y)$ est un polynôme convenablement choisi en x et y, de telle sorte que cette différence soit une intégrale de même forme, mais où α sera remplacé par $\alpha - 1$; en effet, il suffit évidemment pour cela que

$$(2) \qquad P(x,y) - (\alpha - 1)\lambda(x,y) f'_y$$

puisse se mettre sous la forme

$$(x-a)P_1(x,y).$$

Or nous n'avons qu'à choisir $\lambda(x,y)$ de telle sorte que, aux mêmes points de rencontre

$$(a, b_1), \quad (a, b_2), \quad \ldots, \quad (a, b_m)$$

de $x = a$ avec la courbe, le polynôme (2) s'annule; comme tous les points de rencontre sont simples, ce polynôme sera nécessairement de la forme

$$(x-a)P_1(x,y) + f(x,y)P_2(x,y);$$

on pourra prendre simplement pour λ un polynôme en y, $\lambda(y)$, de degré égal à $m - 1$; les conditions précédentes donneront ses valeurs pour $y = b_1, b_2, \ldots, b_m$.

L'intégrale (1) se trouve donc ramenée à une autre de même forme,

mais où α est remplacé par $\alpha - 1$; en continuant de proche en proche, on arrivera à

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a)f'_y}$$

si l'intégrale considérée est de seconde espèce; il en sera de même de cette dernière; par suite $Q(x, y)$ devra s'annuler aux m points de rencontre de $x = a$ avec la courbe et l'on aura, par suite,

$$\frac{Q(x, y)}{x-a} = P(x, y);$$

l'intégrale aura donc la forme

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y},$$

$P(x, y)$ étant un polynôme.

Il nous faut maintenant reprendre l'intégrale (1) en supposant que $x = a$ soit tangente à la courbe f. Soit $(y = b,\ x = a)$ le point M de contact, et la droite rencontrera la courbe en $(m-2)$ autres points $M_1, M_2, \ldots, M_{m-2}$, que nous pouvons supposer distincts. Considérons l'expression

$$\frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^\alpha};$$

on peut faire passer la courbe $\lambda(x, y) = 0$ par chacun des points M_1, $M_2, \ldots, M_{m-2}$. Soit (a, b_1) le point M_1.

Le développement de l'intégrale commence par le terme

$$-\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{Q(a, b_1)}{(x-a)^{\alpha-1} f'_{b_1}};$$

on peut choisir λ de manière qu'il en soit de même pour l'expression

$$\frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^\alpha},$$

il suffira que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial b_1} - \frac{\partial\lambda}{\partial b_1}\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{1}{\alpha-1}\,Q(a, b_1);$$

supposons remplie une condition analogue pour les points

$$(a, b_2), \ldots, (a, b_{m-2}).$$

Passons au point (a, b); on a dans le voisinage de $x = a$

$$y - b = \mu(x - a)^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

développement procédant suivant les puissances de $(x - a)^{\frac{1}{2}}$. Le premier terme du développement de l'intégrale (1) sera $\frac{A}{(x-a)^{\alpha - \frac{1}{2}}}$, A étant un coefficient facile à calculer.

Supposons encore que $\lambda(x, y)$ s'annule pour $x = a, y = b$, le premier terme du développement de $\frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^{\alpha}}$ sera

$$\frac{\mu \frac{\partial \lambda}{\partial b}}{(x-a)^{\alpha - \frac{1}{2}}}.$$

Posons $\mu \frac{\partial \lambda}{\partial b} = A$; nous venons d'imposer un certain nombre de conditions au polynôme $\lambda(x, y)$, on pourra évidemment les remplir. Il suffirait de prendre pour cela un polynôme en y, les conditions précédentes reviennent à

$$\lambda(b) = \lambda(b_1) = \ldots = \lambda(b_{m-2}) = 0,$$

et les dérivées $\lambda'(b), \lambda'(b_1), \ldots, \lambda'(b_{m-2})$ doivent avoir des valeurs données; on suppose que $\frac{\partial f}{\partial a}$ ne soit pas nul en $M_1, M_2, \ldots, M_{m-2}$, mais c'est évidemment une hypothèse permise.

Supposons donc $\lambda(x, y)$ satisfaisant aux conditions précédentes, et envisageons la différence

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a)^{\alpha} f'_y} - \frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^{\alpha}}.$$

Elle sera de la forme

$$\int \frac{Q_1(x, y)\,dx}{(x-a)^{\alpha-1} f'_y},$$

on peut le démontrer comme il suit : la différence considérée semble se présenter sous la forme

$$\int \frac{Q_2(x, y)\,dx}{(x-a)^{\alpha+1} f'_y};$$

or, dans le voisinage de $x = a$, $y = b_1$, le développement de l'intégrale commence par un terme en $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-2}}$; donc

$$\frac{Q_2(x, y)}{(x-a)^2}$$

a une valeur finie pour $x = a$, $y = b_1$, et de même en $(a, b_2), \ldots, (a, b_{m-2})$. Pareillement, en (a, b), le développement de l'intégrale commencera par un terme en $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-\frac{3}{2}}}$; il faut donc encore que

$$\frac{Q_2(x, y)}{(x-a)^2}$$

ait une valeur finie au point $x = a$, $y = b$. On en conclut que ce quotient peut être considéré comme un polynôme en x et y. En effet, dans le voisinage de toute valeur finie $x = x_0$, $y = y_0$ (répondant à un point de la courbe), on peut mettre l'expression précédente sous la forme d'une série procédant suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ et $y - y_0$. Nous n'avons à faire la vérification que pour le couple $x = a$, $y = b$; or, en remplaçant y par son développement suivant les puissances croissantes de $(x-a)^{\frac{1}{2}}$, on aura

$$\frac{Q_2(x, y)}{(x-a)^2} = \alpha_0 (x-a)^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

Mais, d'autre part, on pourra remplacer $(x-a)^{\frac{1}{2}}$ par une série ordonnée suivant les puissances croissantes et entières de $y - b$. On

voit donc que l'expression considérée pourra toujours se mettre sous la forme d'une série procédant suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ et $y - y_0$; ce quotient est donc un polynôme en x et y (théorème dû à M. Nœther); nous nous en servons sous la forme que lui a donnée M. Halphen à la page 22 de son grand Mémoire *Sur les courbes gauches algébriques* (*Journal de l'École Polytechnique;* 1882).

On voit donc que l'on a

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a)^{\alpha} f'_y} = \frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^{\alpha}} + \int \frac{Q_1(x, y)\,dx}{(x-a)^{\alpha-1} f'_y};$$

en continuant de proche en proche, nous arrivons à

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a) f'_y}.$$

Il est manifeste que les raisonnements précédents ne s'appliqueront pas, du moins sous la même forme, à $\alpha = 1$. Si, comme nous avons à le supposer ici, l'intégrale considérée est de seconde espèce, il faudra que $Q(x, y)$ s'annule pour $x = a, y = b_1, b_2, \ldots, b_{m-2}$. Retranchons encore de cette intégrale une expression

$$\frac{\lambda(x, y)}{(x-a)},$$

$\lambda(x, y)$ s'annulant pour $x = a, y = b_1, b_2, \ldots, b_{m-2}$. On a aussi $\lambda(a, b) = 0$, et de plus le coefficient du premier terme

$$\frac{\mu \dfrac{\partial \lambda}{\partial b}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$$

de cette expression est égal au coefficient correspondant dans l'intégrale. Il s'ensuit que la différence

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a) f'_y} - \frac{\lambda(x, y)}{x-a}$$

sera de la forme

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y}.$$

Nous arrivons donc à cette conclusion, que par une soustraction convenable d'une fonction rationnelle de x et y, on peut ramener le second type d'intégrales (T) au premier, et dans les calculs à effectuer, pour faire cette réduction, tous les coefficients de x et y n'entrent que rationnellement.

10. Il nous reste donc à considérer

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y},$$

$P(x, y)$ étant un polynôme. Soit p le degré de ce polynôme, et supposons d'abord

$$p \geq 2m - 3;$$

on peut retrancher de l'intégrale un polynôme

$$\lambda(x, y)$$

de degré $p - m + 2$, tel que les m déterminations de l'intégrale dans le voisinage de $x = \infty$, et les m déterminations de $\lambda(x, y)$ dans le voisinage de ce même point, commencent par le même terme en x^{p-m+2}; ceci est évidemment possible : il suffira de prendre pour $\lambda(x, y)$ un polynôme homogène où figureront un nombre $p - m + 3$ de coefficients arbitraires, et ayant

$$p - m + 3 \geq m;$$

on pourra le déterminer de manière à satisfaire aux m conditions prescrites. Si l'on considère alors la différence

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y} - \lambda(x, y),$$

on voit qu'elle sera de la forme

$$\int \frac{P_1(x, y)\,dx}{f'_y},$$

où $P_1(x, y)$ est seulement de degré $p - 1$; en continuant ainsi de proche en proche, nous arrivons à l'intégrale

$$\int \frac{P(x, y)dx}{f'_y},$$

où $P(x,y)$ est de degré $2m - 4$. Comptons les coefficients réellement arbitraires restant dans cette intégrale, en ne considérant pas comme distinctes les deux intégrales dont la différence serait un polynôme en x et y. Dans $P(x, y)$ figurent

$$\frac{(2m-3)(2m-2)}{2}$$

coefficients, mais nous pouvons retrancher de l'intégrale

$$\lambda(x, y),$$

où λ est un polynôme arbitraire de degré $m - 2$ qui peut s'écrire

$$\int \frac{\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}}{f'_y} dx,$$

et qui contient alors au numérateur $\frac{m(m-1)}{2} - 1$ paramètres arbitraires. Le numérateur de l'intégrale ne renfermera plus alors que

$$\frac{(2m-3)(2m-2)}{2} - \left[\frac{(m-1)m}{2} - 1\right]$$

paramètres, et l'on peut encore réduire ce nombre, car le numérateur ne changera pas si l'on en retranche le produit

$$\lambda_1(x, y) f(x, y),$$

où λ_1 est un polynôme de degré $m - 4$, ce qui diminue encore le nombre précédemment trouvé de

$$\frac{(m-3)(m-2)}{2}.$$

En définitive, le nombre des paramètres réellement arbitraires sera

$$\frac{(2m-3)(2m-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} + 1 - \frac{(m-3)(m-2)}{2} = m^2 - 2m + 1.$$

Si, d'autre part, nous voulons que l'intégrale soit de seconde espèce, nous aurons à écrire que le point ∞ n'est pas un point critique logarithmique, ce qui donne $(m-1)$ conditions. Il nous reste donc en résumé, dans l'intégrale de seconde espèce, un nombre de coefficients réellement arbitraire qui est égal à

$$m^2 - 2m + 1 - (m-1) \quad \text{ou} \quad (m-1)(m-2),$$

et nous retombons précisément sur le nombre $2p$ (p étant le genre), puisque ici

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2};$$

ainsi, en retranchant de l'intégrale de seconde espèce considérée une fonction rationnelle de x et y, *fonction dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des coefficients figurant dans l'intégrale*, on peut exprimer l'intégrale par une combinaison linéaire de $2p$ intégrales particulières de seconde espèce.

11. Nous avons supposé dans ce qui précède que la courbe

$$f(x, y) = 0$$

n'avait pas de points doubles; supposons maintenant que la courbe ait un certain nombre de points doubles. Nous aurons à discuter l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a)^2 f'_y},$$

la droite $x = a$, passant par un point double de la courbe proposée, dont les coordonnées sont a et b. Deux branches *distinctes* de courbes passent au point (a, b), et, pour chacune de ces branches, le développement de l'intégrale commence par un terme en $\frac{1}{(x-a)^2}$. Nous

allons retrancher de l'intégrale une expression de la forme

$$(1) \qquad \frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^{\alpha+1}},$$

$\lambda(x, y)$ s'annulant pour $x = a$, $y = b$. Soient

$$y = b + \mu(x-a) + \ldots,$$
$$y = b + \mu'(x-a) + \ldots,$$

les développements relatifs aux deux branches de la courbe passant par le point double.

Les coefficients de $\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}$ dans le développement de l'expression (1) seront

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a} + \mu\frac{\partial\lambda}{\partial b} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\lambda}{\partial a} + \mu'\frac{\partial\lambda}{\partial b}.$$

D'autre part, dans le développement de l'intégrale, ces coefficients auront certaines valeurs A et B; nous pouvons choisir $\lambda(x, y)$ de telle sorte que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a} + \mu\frac{\partial\lambda}{\partial b} = A, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial a} + \mu'\frac{\partial\lambda}{\partial b} = B.$$

Considérons encore les coefficients de $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$ dans le développement de l'expression (1) et dans le développement de l'intégrale; en écrivant qu'ils sont égaux, nous aurons deux relations entre

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial a^2}, \quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial a\,\partial b}, \quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial b^2}.$$

Soient maintenant $(a, b_1), (a, b_2), \ldots, (a, b_{m-2})$ les $(m-2)$ autres points simples de rencontre de la droite $x = a$ avec la courbe. Choisissons le polynôme λ de telle sorte qu'en chacun des points $\lambda(x, y)$ s'annule, que le coefficient du terme en $\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}$ dans (1) soit nul, et enfin que le coefficient du terme en $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$ soit égal au coefficient du même terme dans le développement de l'intégrale. On peut évi-

demment satisfaire à toutes ces conditions; il arrive alors que, pour la différence

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a)^{\alpha} f'_y} - \frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^{\alpha+1}},$$

les deux développements dans le voisinage de $x = a$, $y = b$ commencent par un terme en $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-2}}$, et dans le voisinage de $x = a$, $y = b_i$, le développement commence également par un terme du même degré. Or cette différence sera de la forme

$$\int \frac{Q_1(x, y)\,dx}{(x-a)^{\alpha+2} f'_y};$$

d'après ce qui précède, le quotient

$$\frac{Q_1(x, y)}{(x-a)^3}$$

aura une valeur finie pour $x = a$, $y = b_i (i = 1, 2, \ldots, m-2)$ et pour $x = a$, $y = b$, sur l'une et l'autre branche,

$$\frac{Q_1(x, y)}{(x-a)^3}$$

aura une valeur finie. Je dis qu'alors $\frac{Q_1(x, y)}{(x-a)^3}$ peut se mettre sous la forme d'un polynôme en x et y; on pourra, en effet, déterminer les coefficients A, A', ... de manière à écrire

$$\begin{aligned}\frac{Q_1(x, y)}{(x-a)^3} = {} & A(x-a) + A'(y-b) \\ & + A''(x-a)^2 + A'''(x-a)(y-b) + A^{\text{IV}}(y-b)^2 + \ldots,\end{aligned}$$

pour l'une et l'autre branche passant par le point (a, b); le quotient précédent a donc le caractère d'une fonction entière au point $x = a$, $y = b$ (voir Halphen, *loc. cit.*). Il en est évidemment de même pour $(x = a, y = b_i)$ et par suite, d'après le théorème déjà invoqué de M. Nœther, on aura

$$\frac{Q_1(x, y)}{(x-a)^3} = Q_2(x, y).$$

La différence considérée est donc de la forme

$$\int \frac{Q_2(x, y)\,dx}{(x-a)^{\alpha-1} f'_y};$$

elle a donc la même forme, mais α est remplacé par $\alpha - 1$. En continuant ainsi de proche en proche et en supposant que l'intégrale est de seconde espèce, on arrive à l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{f'_y},$$

après avoir retranché une fonction rationnelle de x et y. La réduction de cette intégrale se fera absolument comme dans le premier cas, en tenant compte seulement de plus que $Q(x, y) = 0$ passe par les points doubles de f. Le nombre des paramètres réellement arbitraires sera donc

$$(m-1)(m-2) - 2d \quad \text{ou bien} \quad 2p.$$

Nous arrivons donc à la même conclusion que l'on peut ainsi formuler : soit

$$\int R(x, y)\,dx$$

une intégrale quelconque de seconde espèce; *on pourra exprimer cette intégrale par une fonction rationnelle* F *de* x *et* y, *et par une somme de* $2p$ *intégrales particulières de seconde espèce de la forme*

$$\sum_{i=1}^{i=2p} A_i \int \frac{Q_i(x, y)\,dx}{f'_y},$$

où Q *est un polynôme d'ordre* $2m-4$. *De plus, et c'est là le point essentiel, les coefficients de* F *et les coefficients* A_i *s'exprimeront rationnellement à l'aide des coefficients qui figurent dans* R.

12. Après cette digression indispensable sur les intégrales abéliennes, revenons à l'intégrale de seconde espèce

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de x, y, z, et l'on a

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0.$$

Envisageons d'abord l'intégrale abélienne

$$\int P\,dx$$

attachée à la relation (1) entre z et x, où y est considéré comme un paramètre. D'après ce qui précède, nous pouvons trouver $2p$ intégrales particulières de seconde espèce

$$\int \frac{Q_1(x, y)\,dx}{f'_z}, \quad \int \frac{Q_2(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \quad \ldots, \quad \int \frac{Q_{2p}(x, y, z)\,dx}{f'_z},$$

où $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2p}$ sont des polynômes en x, y, z de degré $2m - 4$, en désignant par m le degré de l'équation (1), et par p le genre de cette relation algébrique entre x et z; et l'on pourra écrire

$$\int P\,dx = a_1 \int \frac{Q_1\,dx}{f'_z} + a_2 \int \frac{Q_2\,dx}{f'_z} + \ldots + a_{2p} \int \frac{Q_{2p}\,dx}{f'_z} + \lambda(x, y, z),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ étant des fonctions rationnelles de y, et λ une fonction rationnelle de x, y et z; ceci est une conséquence immédiate de la méthode de réduction exposée dans les paragraphes précédents.

Ceci posé, retranchons de $\int P\,dx + Q\,dy$ la fonction rationnelle

$$\lambda(x, y, z);$$

nous aurons la différentielle totale

$$\int R\,dx + S\,dy;$$

et l'on aura

$$(2) \qquad \int R\,dx = a_1 \int \frac{Q_1\,dx}{f'_z} + \ldots + a_{2p} \int \frac{Q_{2p}\,dx}{f'_z};$$

comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois, les périodes de l'intégrale

abélienne

$$\int R\,dx,$$

où y est considéré comme un paramètre, *ne doivent pas dépendre de ce paramètre*. Nous avons donc d'abord à rechercher si l'on peut déterminer des fonctions *rationnelles*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p}$$

de y, de telle sorte que les périodes de la somme (2) ne dépendent pas de y; les polynômes Q sont à considérer comme connus et parfaitement déterminés.

On peut toujours déterminer des fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ de y, telles que l'expression (2) ait ses périodes indépendantes de y. Pour une valeur arbitraire donnée à y, considérons $2p$ cycles donnant les $2p$ périodes

$$P_{1,i}, \quad P_{2,i}, \quad \ldots, \quad P_{2p,i}$$

de l'intégrale de seconde espèce

$$\int \frac{Q_i\,dx}{f'_z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Si l'on veut que les périodes de l'expression (2) soient des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}$, on devra déterminer les a de telle sorte que

$$\begin{aligned}
a_1 P_{1,1} + a_2 P_{1,2} + \ldots + a_{2p} P_{1,2p} &= \alpha_1,\\
a_1 P_{2,1} + a_2 P_{2,2} + \ldots + a_{2p} P_{2,2p} &= \alpha_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
a_1 P_{2p,1} + a_2 P_{2p,2} + \ldots + a_{2p} P_{2p,2p} &= \alpha_{2p};
\end{aligned}$$

le déterminant de ces équations du premier degré en $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ n'est pas nul, car les périodes P sont les périodes de $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce (c'est-à-dire des intégrales dont aucune combinaison linéaire n'est une fonction algébrique). On peut donc tirer de là

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_1 Q_{1,1} + \alpha_2 Q_{2,1} + \ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,1},\\
a_2 &= \alpha_1 Q_{1,2} + \alpha_2 Q_{2,2} + \ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
a_{2p} &= \alpha_1 Q_{1,2p} + \alpha_2 Q_{2,2p} + \ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,2p}.
\end{aligned}$$

Les P et par suite les Q sont des fonctions de y qui pourront évidemment s'exprimer au moyen d'intégrales définies.

La question qui se pose maintenant est donc la suivante : *peut-on déterminer les constantes* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}$ *de telle sorte que les fonctions de* y

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

définies par les égalités précédentes, soient des fonctions rationnelles de y?

15. Il serait impossible de répondre à la question précédente, en partant des expressions données pour $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$; mais nous allons montrer qu'on peut ramener la question posée à la recherche des intégrales rationnelles d'une équation différentielle linéaire.

Considérons d'abord, à cet effet, une quelconque des intégrales de seconde espèce

$$\int \frac{Q_i dx}{f_z'},$$

et ses $2p$ périodes

$$P_{1,i}, \quad P_{2,i}, \quad \ldots, \quad P_{2p,i}.$$

Ce sont des fonctions du paramètre y, et elles ont été étudiées à ce point de vue par M. Fuchs dans un Mémoire qui est la suite de celui que nous avons cité plus haut (*Journal de Crelle*, t. 73, p. 324). M. Fuchs établit entre autres résultats, dans ce beau travail, que ces périodes satisfont à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes en y; cette équation sera, en général, d'ordre $2p$, mais elle pourra être d'ordre moindre.

Nous ferons d'abord la remarque évidente que les différentes équations linéaires qu'on obtient en faisant successivement $i = 1, 2, \ldots, 2p$ ont même groupe G, et toutes les substitutions de ce groupe effectuées sur

$$P_{1,i}, \quad P_{2,i}, \quad \ldots, \quad P_{2p,i}$$

sont à coefficients entiers et à déterminant 1. On en conclura de suite

que le déterminant

$$\begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{2,1} & \dots & P_{2p,1} \\ P_{1,2} & P_{2,2} & \dots & P_{2p,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1,2p} & P_{2,2p} & \dots & P_{2p,2p} \end{vmatrix}$$

des équations du premier degré donnant $a_1, a_2, \dots, a_{2p}$ est une fonction rationnelle de y, puisque toute substitution du groupe commun des équations linéaires laisse invariable ce déterminant

Ceci posé, considérons les expressions

$$Q_{1,1}, \quad Q_{2,1}, \quad \dots, \quad Q_{2p,1},$$

qui figurent dans a_1, qui sont les mineurs du premier ordre du déterminant précédent, correspondant à la suppression de la première ligne horizontale. A chaque substitution du groupe G correspond évidemment une substitution linéaire effectuée sur les expressions Q, et celles-ci satisfont à une équation linéaire d'ordre au plus égal à $2p$, et dont les coefficients sont des polynômes en x. On pourra former cette équation linéaire, que je désignerai par E, et sa considération va nous donner immédiatement la solution du problème proposé.

Nous avons en effet à rechercher si l'on peut déterminer les constantes α, de telle sorte que

$$\alpha_1 Q_{1,1} + \alpha_2 Q_{2,1} + \dots + \alpha_{2p} Q_{2p,1}$$

soit une fonction rationnelle de y. Or ceci revient à rechercher si l'équation différentielle linéaire E, à coefficients rationnels et à intégrales régulières, peut être vérifiée par une fonction rationnelle de la variable y. La solution de ce dernier problème est bien connue, et l'on voit qu'on peut décider si les constantes peuvent être choisies de telle sorte que a_1 soit une fonction rationnelle de y. Les constantes α étant choisies, s'il est possible, de telle sorte que a_1 soit une fonction rationnelle de y, il en résultera pour

$$a_2, \quad a_3, \quad \dots, \quad a_{2p}$$

des expressions qui seront fonctions rationnelles de y. En effet, prenons,

par exemple, l'expression de a_2

$$a_1 Q_{1,2} + \alpha_2 Q_{2,2} + \ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,2} :$$

elle satisfera à une équation linéaire qui aura même groupe que celle à laquelle satisfait a_1; donc à une intégrale rationnelle de la première correspond une intégrale rationnelle de la seconde.

La question posée à la fin du paragraphe précédent peut donc être complètement résolue à l'aide de l'équation E, et nous pouvons supposer que nous ayons un certain nombre de systèmes linéairement indépendants de

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

fonctions rationnelles de y; chacun d'eux nous fournira une intégrale

$$\int \frac{a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \ldots + a_{2p} Q_{2p}}{f'_z} \, dx,$$

dont les périodes ne dépendront pas de y.

14. Il faut maintenant rechercher si nous pourrons former des intégrales de différentielle totale, correspondant aux intégrales que nous venons de trouver. Il en est effectivement ainsi, comme nous allons le faire voir. Désignons par

$$\int R(x, y, z) \, dx$$

une intégrale, comme on vient d'en trouver une au paragraphe précédent, dont les périodes ne dépendent pas de y. Peut-on trouver une fraction rationnelle $S(x, y, z)$, telle que

$$R(x, y, z) \, dx + S(x, y, z) \, dy$$

soit une différentielle totale d'une fonction de x et y? Il faut que

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

en désignant, bien entendu, par $\frac{\partial R}{\partial y}$ la dérivée partielle, par rapport à y.

de R considérée comme fonction de x et y seulement, et non la dérivée partielle, par rapport à y, de $R(x, y, z)$. On aura alors

$$S = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R}{\partial y}\, dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} R(x, y, z)\, dx.$$

L'intégration précédente est faite, par rapport à x, en donnant à y une valeur constante, d'ailleurs arbitraire, et x_0 est une constante fixe. Or l'équation

$$f(x_0, y, z) = 0$$

donnera, pour z, m valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_m$. L'intégrale ne se trouvera définie, à des multiples près des périodes, que si l'on se donne la valeur initiale et la valeur finale de z. Pour éviter toute ambiguïté, considérons la somme

$$\int_{x_0, z_1}^{x, z} R(x, y, z)\, dx + \int_{x_0, z_2}^{x, z} R(x, y, z)\, dx + \ldots + \int_{x_0, z_m}^{x, z} R(x, y, z)\, dx,$$

y ayant une valeur constante, d'ailleurs arbitraire. En un point arbitraire (x, y, z) de la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

cette somme a une valeur déterminée, à un multiple près des périodes, et par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{i=1}^{i=m} \int_{x_0, z_i}^{x, z} R(x, y, z)\, dx\right]$$

aura une valeur *unique* en chaque point x, y, z, *puisque les périodes des intégrales ne dépendent pas de* y. Par suite, cette expression sera une fonction rationnelle de x, y et z, car les points singuliers de cette fonction de x et de y ne peuvent être des points singuliers essentiels. Nous prenons maintenant la fraction rationnelle $S(x, y, z)$,

$$S(x, y, z) = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{i=1}^{i=m} \int_{x_0, z_i}^{x, z} R(x, y, z)\, dx\right];$$

sa dérivée partielle par rapport à x sera

$$\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}[m\mathrm{R}(x, y, z)]:$$

ce sera, par conséquent, la dérivée partielle par rapport à y de la fonction R. Nous aurons donc une intégrale de différentielle totale

$$\int \mathrm{R}(x, y, z)\,dx + \mathrm{S}(x, y, z)\,dy,$$

R et S étant des fonctions rationnelles de x, y et z.

Nous avons donc trouvé toutes les intégrales de différentielles totales attachées à la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

qui *peuvent* être des intégrales de seconde espèce.

Ces intégrales ne se réduiront certainement pas à des fonctions rationnelles de x, y, z. Cela résulte immédiatement de la manière même dont elles ont été formées; car, laissant y constant, on a l'intégrale

$$\int \mathrm{R}(x, y, z)\,dx,$$

dont toutes les périodes ne sont pas nulles.

Mais il pourrait arriver que les intégrales qui viennent d'être trouvées ne fussent pas de seconde espèce, c'est-à-dire que les périodes le long de certains cycles infiniment petits ne fussent pas nulles. On aura à faire sur chacune de ces intégrales une discussion analogue à celle qui a été faite au § VIII. L'étude de l'intégrale ne présentera pas de difficultés dans le voisinage de tout point simple ou d'un point qui soit une singularité ordinaire pour la surface (*voir* mon Mémoire *Sur les intégrales de première espèce*, t. I, 4e série de ce journal), et, comme je l'ai rappelé dans l'Introduction, l'étude des singularités quelconques pourra se faire en suivant la voie indiquée par M. Nœther.

Ainsi, en résumé, après des calculs qui pourront être fort longs, mais qui peuvent être régulièrement effectués, *nous pourrons décider si une surface algébrique donnée possède des intégrales de seconde*

espèce et trouver toutes les intégrales distinctes de seconde espèce, c'est-à-dire celles pour lesquelles aucune combinaison linéaire n'est une fonction rationnelle de x, y et z.

CHAPITRE III.

15. Nous allons considérer dans ce Chapitre une classe de surfaces admettant des intégrales de seconde espèce, et cette étude nous conduira à une remarque importante relative aux fonctions hyperfuchsiennes et aux fonctions hyperabéliennes, dont je me suis occupé dans différents Mémoires (*Acta mathematica* et *Journal de Mathématiques*).

Nous allons raisonner sur les fonctions et groupes hyperfuchsiens; des considérations toutes semblables seraient applicables aux fonctions et groupes hyperabéliens.

Envisageons un groupe hyperfuchsien G pour lequel nous supposerons que le domaine fondamental n'a aucun point commun avec l'hypersphère limite. Nous avons précédemment défini ce que l'on doit entendre par la connexion de troisième espèce, relative à ce domaine fondamental (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. I, p. 20). Soit $p_3 + 1$ l'ordre de cette connexion; nous aurons alors p_3 substitutions du groupe

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \ldots, \quad \Sigma_{p_3},$$

qui correspondront aux p_3 *coupures* à trois dimensions, faites dans le polyèdre fondamental. Toutes ces substitutions sont évidemment hyperboliques, et il en est de même de toutes les substitutions du groupe g' ayant les substitutions précédentes comme substitutions fondamentales: le groupe hyperfuchsien g' est un sous-groupe contenu dans le groupe initial g.

Ceci posé, considérons un groupe G, isomorphe du groupe g, et dont toutes les substitutions, qui sont linéaires et sont effectuées sur deux lettres, soient représentées par un tableau de coefficients de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

on peut prendre arbitrairement le coefficient a dans les substitutions correspondant à

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \ldots, \quad \Sigma_{p_2},$$

et pour toute substitution elliptique de g, la substitution correspondante dans G se réduira à la substitution unité, c'est-à-dire que a sera nul. Envisageons donc ces deux groupes isomorphes g et G; soient

$$\left(u, v, \frac{M_1 u + N_1 v + P_1}{Mu + Nv + P}, \frac{M_2 u + N_2 v + P_2}{Mu + Nv + P}\right),$$

une substitution quelconque de g, et

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

le tableau des coefficients de la substitution correspondante dans G.

Je dis que l'on pourra former deux fonctions uniformes et continues de u, v

$$G(u, v), \quad G_1(u, v),$$

telles que

$$(r) \quad \begin{cases} G\left(\dfrac{M_1 u + N_1 u + P_1}{Mu + Nv + P}, \dfrac{M_2 u + N_2 v + P_2}{Mu + Nv + P}\right) \\ \qquad = (Mu + Nv + P)^{3m}\,[G(u, v) + a G_1(u, v)], \\ G_1\left(\dfrac{M_1 u + N_1 v + P_1}{Mu + Nv + P}, \dfrac{M_2 u + N_2 v + P_2}{Mu + Nv + P}\right) \\ \qquad = (Mu + Nv + P)^{3m} G_1(u, v). \end{cases}$$

16. Nous obtiendrons des fonctions satisfaisant aux conditions précédentes, en formant les séries suivantes.

Désignons par

$$(u, v, U_i, V_i),$$

le dénominateur commun de U_i et V_i, étant $M_i u + N_i v + P_i$ une substitution quelconque du groupe g et

$$\begin{vmatrix} 1 & a_i \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

la substitution correspondante de G; formons alors les deux séries, en représentant par $R(u, v)$ et $R_1(u, v)$ deux fonctions rationnelles de u et v, qui restent finies à l'intérieur et sur la surface de l'hypersphère limite

$$G(u, v) = \sum_i [R(U_i, V_i) - a_i R_1(U_i, V_i)] \frac{1}{(M_i u + N_i v + P_i)^{3m}},$$

$$G_1(u, v) = \sum_i R_1(U_i, V_i) \frac{1}{(M_i u + N_i v + P_i)^{3m}},$$

les sommations étant étendues à toutes les substitutions du groupe g; le nombre m, qui figure dans ces formules, est un entier positif. La seconde série est convergente pour $m \geq 2$ [*voir* mon Mémoire *Sur un groupe de substitutions linéaires* (*Acta mathematica*, t. I)] et, à l'aide de considérations présentant une grande analogie avec celles dont a fait usage M. Poincaré dans ses études sur les séries zêtafuchsiennes (*Acta mathematica*, t. V, p. 233), on montrera que la seconde série est convergente pour une valeur suffisamment grande de l'entier m, la limite dépendant uniquement du groupe hyperfuchsien.

Il est facile de voir ce que deviennent les fonctions G et G_1, quand on effectue sur u et v une substitution du groupe hyperfuchsien; les deux séries

$$\sum_i R(U_i, V_i) \frac{1}{(M_i u + N_i v + P_i)^{3m}}$$

et

$$\sum_i R_1(U_i, V_i) \frac{1}{(M_i u + N_i v + P_i)^{3m}}$$

se reproduiront multipliées par $(Mu + Nv + P)^{3m}$ si l'on fait sur u, v la substitution

$$(1) \qquad \left(u, v, \frac{M_1 u + N_1 v + P_1}{Mu + Nv + P}, \frac{M_2 u + N_2 v + P_2}{Mu + Nv + P}\right) \quad \text{ou} \quad (u, v, U, V),$$

et désignons par a la quantité figurant dans la substitution correspondante du groupe G. Il faut voir ce que devient la série

$$\theta(u, v) = \sum a_i R_1(U_i, V_i) \frac{1}{(M_i u + N_i v + P_i)^{3m}};$$

après la substitution (1) : le terme marqué par l'indice i dans la série se trouve remplacé par un autre terme, et on a la série

$$\theta(U, V) = \sum a_i R_1(U_j, V_j) \frac{1}{(M_j u + N_j v + P_j)^{3m}} (Mu + Nv + P)^{3m};$$

d'autre part, la série initiale pouvait s'écrire

$$\sum a_j R_1(U_j, V_j) \frac{1}{(M_j u + N_j v + P_j)^{3m}},$$

et l'on a manifestement $a_i + a = a_j$ ou $a_i = a_j - a$.

Écrivant donc

$$\theta(U, V) = \sum (a_j - a) R_1(U_j, V_j) \frac{1}{(M_j u + N_j v + P_j)^{3m}} (Mu + Nv + P)^{3m},$$

on aura

$$\theta(U, V) = (Mu + Nv + P)^{3m} [\theta(u, v) - a G_1(u, v)],$$

et, par conséquent, les fonctions $G(u, v)$ et $G_1(u, v)$ satisfont aux relations (r) du paragraphe précédent.

17. Considérons maintenant la fonction

$$\varphi(u, v) = \frac{G(u, v)}{G_1(u, v)};$$

on aura, pour toute substitution (u, v, U, V) du groupe,

$$\varphi(U, V) = \varphi(u, v) + a,$$

et l'on peut prendre arbitrairement (§ **15**) p_3 des quantités a, à savoir celles qui correspondent aux substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p_3}$.

On sait, d'autre part, que toutes les fonctions hyperfuchsiennes, relatives au groupe g, peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de trois d'entre elles, x, y, z, qui sont liées par une relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0 :$$

c'est de cette surface que je voudrais maintenant m'occuper.

On a

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv;$$

donc

$$d\varphi = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}\,dx + \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}\,dy;$$

les coefficients de dx et dy sont des fonctions uniformes de u et v. Elles resteront d'ailleurs invariables pour toute substitution du groupe : ce seront des fonctions hyperfuchsiennes de u et v, et par suite des fonctions rationnelles de x, y et z.

On a ainsi

$$d\varphi = \mathrm{P}(x, y, z)\,dx + \mathrm{Q}(x, y, z)\,dy,$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de x, y, z. La fonction $\varphi(u, v)$ considérée comme fonction rationnelle de x et y sera donc une intégrale de différentielle totale

$$\varphi = \int \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy,$$

relative à la surface f.

Cette intégrale sera une intégrale de seconde espèce. Il est impossible en effet qu'un cycle infiniment petit donne une période différente de zéro ; car à tout cycle correspond une substitution du groupe hyperfuchsien. Si le cycle est infiniment petit, cette substitution devra nécessairement être elliptique, et par suite la valeur correspondante de a sera nulle.

On voit donc que φ est une intégrale de *seconde* espèce, et elle possède p_3 périodes qui peuvent d'ailleurs être choisies arbitrairement. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui exprime une propriété remarquable de la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

La surface f possède des intégrales de seconde espèce. Le nombre de ces intégrales linéairement indépendantes (c'est-à-dire pour lesquelles aucune combinaison linéaire n'est égale à une fonction ration-

nelle de x, y et z) *est égal à* p_3, *et le nombre des périodes de ces intégrales de seconde espèce est également représenté par* p_3.

On voit, par l'énoncé précédent, que la surface f jouit d'une propriété bien remarquable et bien spéciale, et nous pouvons en conclure, relativement aux fonctions hyperfuchsiennes, une conséquence, qui, pour être négative, ne m'en paraît pas moins présenter quelque intérêt.

On sait que M. Poincaré a démontré que les coordonnées d'une courbe algébrique quelconque

$$f(x, y) = 0$$

peuvent s'exprimer par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre, et c'est là certainement un des plus beaux résultats que présente la théorie des fonctions fuchsiennes. Une question analogue se pose d'elle-même pour une surface

$$f(x, y, z) = 0;$$

on se demande naturellement si l'on peut exprimer ses coordonnées x, y, z par des fonctions hyperfuchsiennes de deux paramètres. Le théorème que nous venons de démontrer permet de répondre à cette question, et la réponse est *négative*. On vient de voir en effet que les surfaces correspondant à un groupe hyperfuchsien avaient, en général, des intégrales de seconde espèce, et nous savons que cette propriété n'appartient pas à une surface algébrique prise arbitrairement. Les fonctions hyperfuchsiennes conduisent donc à une classe spéciale et remarquable de surfaces algébriques.

Paris, 15 avril 1886.

Recherches sur la transformation, par des substitutions réelles, d'une somme de deux ou de trois carrés en elle-même;

Par M. LIPSCHITZ.

Traduction publiée avec l'autorisation de l'auteur, par J. MOLK, à Besançon.

La théorie, due à Gauss, des nombres complexes entiers repose sur la décomposition de ces nombres en nombres complexes entiers irréductibles, autrement dit *nombres complexes premiers*. On peut, à l'aide du même procédé de décomposition, représenter toutes les substitutions, à coefficients rationnels, qui transforment une somme de deux carrés en elle-même. La transformation d'une somme de trois carrés en elle-même conduit au calcul des quaternions; en considérant les substitutions correspondant à cette transformation et dont les coefficients sont des nombres rationnels, on est amené à étudier les quaternions entiers et, dans cette étude, ce qui importe tout d'abord est la décomposition des quaternions entiers en quaternions entiers irréductibles, autrement dit *quaternions premiers*. J'ai cherché à approfondir cette question et je donne, dans ce Mémoire, les résultats auxquels je suis parvenu. De même que la décomposition, en ses facteurs premiers, d'un nombre complexe entier dépend de sa norme, qui est une somme de deux carrés entiers, de même la décomposition, en ses facteurs premiers, d'un quaternion entier dépend de sa norme, qui est une somme

de quatre carrés entiers. C'est pourquoi mon Mémoire s'appuie sur les recherches déjà faites qui ont pour objet de mettre les nombres entiers sous la forme d'une somme de quatre carrés.

Après Fermat qui, le premier, a énoncé, comme remarque au problème 31 du Livre IV de Diophante, le célèbre théorème sur la possibilité de représenter un entier quelconque par la somme d'un nombre déterminé de nombres polygonaux d'une certaine espèce, Euler s'est occupé du théorème d'après lequel on peut représenter un entier quelconque par la somme de quatre carrés, dans le Mémoire intitulé : *Demonstratio theorematis Fermatiani, omnem numerum primum formæ* $4n+1$ *esse summam duorum quadratorum* (*N. Comm. Petrop.*, t. V, p. 3, 1754; *Comm. ar.*, t. I, p. 210).

Ce Mémoire contient (art. **93**) le théorème d'Algèbre à l'aide duquel on peut représenter, par une somme de quatre carrés, le produit de deux sommes de quatre carrés; on peut déduire immédiatement de ce théorème les règles du calcul des quaternions. Dans les œuvres posthumes de Gauss (*Œuvres complètes*, t. III, p. 384) se trouve une autre manière de présenter le même théorème; on y fait usage de paires de quantités complexes conjuguées.

La première démonstration complète du théorème, que chaque entier est la somme de quatre carrés, se trouve dans le Mémoire de Lagrange, *Démonstration d'un théorème d'Arithmétique* (*N. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 1770, *Œuvres*, t. III, p. 189); elle a été commentée avec détails par Euler dans le Mémoire : *Novæ demonstrationes circa resolutionem numerorum* (*Acta erudit.*, p. 193, 1773, Lips.; *Acta Petrop.*, t. I, II, p. 48, 1775; *Exhib.*, 1772, septembr. 21; *Comm. ar.*, t. I, p. 538). En déterminant, à l'aide de la théorie des fonctions elliptiques, de combien de manières différentes on peut mettre un entier donné sous la forme d'une somme de quatre carrés, Jacobi jeta un nouveau jour sur ce sujet. On trouve cette détermination à la fin des *Fundamenta nova;* elle est bien mise en évidence dans la Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés; enfin, dans le Mémoire : *De compositione numerorum e quatuor quadratis* (*Journal de Crelle*, t. 12, p. 167), elle est donnée d'une façon purement arithmétique. Le Mémoire de Lejeune-Dirichlet : *Sur l'équation* $t^2+u^2+v^2+w^2=4m$ (*Journal de Liou-*

ville, 2e série, t. I, p. 210), contient une reproduction plus concise de cette démonstration; c'est dans ce Mémoire que Lejeune-Dirichlet nous apprend qu'il possède depuis longtemps une démonstration du même théorème basée sur des principes différents, et que cette démonstration trouvera sa place naturelle dans un travail qui l'occupe depuis quelque temps. On sait que la mort l'a empêché de publier les recherches qu'il avait faites sur ce sujet.

Je dois aussi rappeler la démonstration complète du théorème de Fermat concernant les nombres polygonaux, qui a été donnée par Cauchy, et que l'on trouve dans le premier volume des *Exercices*, p. 263 ; ainsi que les recherches de M. Hermite sur la représentation des nombres entiers par une somme de quatre carrés, qui font l'objet de son second Mémoire sur la théorie des formes quadratiques (*Journal de Crelle*, t. 47, p. 343).

Je voudrais encore faire une remarque générale sur la marche suivie dans mes recherches. La décomposition des nombres complexes entiers en leurs facteurs premiers tient essentiellement, ce me semble, à ce que le résultat de la multiplication de ces nombres est indépendant de l'ordre dans lequel on effectue cette opération. Pour les nombres algébriques quelconques, la multiplication dont on fait usage jouit de la même propriété et, une fois les notions convenables introduites, les lois de la décomposition continuent à avoir lieu, comme l'a montré M. Dedekind (*Vorlesungen Dirichlet's über Zahlentheorie*, 2e et 3e édition) et [*Sur la théorie des nombres entiers algébriques* (*Bulletin de Darboux*, 1877)]. La démonstration de l'existence des facteurs premiers idéaux dans la théorie, due à M. Kummer, des nombres complexes entiers provenant de la division du cercle, repose, d'autre part, sur certaines congruences qui apparaissent sous une forme simple dans la décomposition des nombres complexes entiers de la forme $a + b\sqrt{-1}$. M. Dedekind a communiqué les congruences correspondantes, se rapportant à la théorie des nombres algébriques, en annonçant, dans les *Göttingischen gelehrten Anzeigen* du 20 septembre 1871, la seconde édition des *Vorlesungen Dirichlet's* que je citais tout à l'heure. On fera remarquer dans le Mémoire actuel que la possibilité de mettre un quaternion entier sous forme de produit de quaternions entiers irréductibles repose également sur l'existence de

certaines congruences; mais ici l'ordre dans lequel se succèdent les facteurs irréductibles du produit est d'une importance capitale. Ainsi, au domaine des nombres entiers complexes de Gauss viennent s'adjoindre, d'une part, le domaine de tous les nombres algébriques, d'autre part, le domaine des quaternions entiers; mais, si l'on remarque plus d'une analogie, on remarque aussi plus d'un contraste entre ces différents domaines. C'est pour pouvoir bien éclairer ces analogies et ces contrastes que je m'occuperai tout d'abord de la décomposition des nombres complexes de Gauss. Je commencerai par exposer les principes de la transformation réelle d'une somme de deux carrés en elle-même; j'établirai, en prenant cette transformation pour base, les règles du calcul des quantités complexes, après quoi je passerai à l'étude des nombres complexes entiers. Je considérerai ensuite la transformation réelle d'une somme de trois carrés en elle-même; j'établirai, en prenant cette transformation pour base, les règles du calcul des quaternions, après quoi je passerai à l'étude des quaternions entiers.

I.

Transformation réelle d'une somme de deux carrés en elle-même et définition des quantités complexes.

Si une substitution linéaire à coefficients réels $\alpha_{11}, \alpha_{12}; \alpha_{21}, \alpha_{22}$, qui représente les variables réelles x_1 et x_2 en fonction des variables réelles y_1 et y_2, transforme la somme des carrés des premières variables dans la somme des carrés des dernières, on a, à la fois, les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2, \\ x_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2, \end{cases}$$

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Le déterminant de substitution ne peut alors être égal qu'à $+1$ ou à -1; supposons-le égal à $+1$. L'équation (2) est évidemment encore vérifiée et la valeur du déterminant ne change pas si, au lieu de la

substitution (1), nous en employons une autre déduite de (1) en multipliant les quatre coefficients par l'unité négative. De chacun de ces deux systèmes on peut déduire un nouveau système en ajoutant l'unité à chacun des éléments de celle des diagonales du déterminant de substitution qui joint le premier élément à gauche au dernier élément à droite. Les déterminants de ces deux nouveaux systèmes

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+1 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}+1 \end{vmatrix},$$

$$(3_a)\qquad \begin{vmatrix} -\alpha_{11}+1 & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22}+1 \end{vmatrix}$$

sont respectivement égaux à

$$(4)\qquad 2+\alpha_{11}+\alpha_{22};$$

$$(4_a)\qquad 2-\alpha_{11}-\alpha_{22};$$

la somme de ces valeurs étant égale au nombre 4, l'un au moins des deux déterminants a une valeur différente de zéro. Si donc, pour une substitution donnée, le déterminant (3) était nul, le déterminant (3_a) ne serait sûrement pas nul. Cette remarque permet de supposer que le système donné de coefficients α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} est tel que la valeur du déterminant (3) correspondant est différente de zéro. Nous ferons cette hypothèse dans tout ce qui suivra.

Le déterminant (3) paraît dès que l'on cherche à former, à l'aide de la substitution (1), les équations qui donnent y_1 et y_2 en fonction des sommes x_1+y_2 et x_2+y_2. Les équations (1) donnent, en effet, immédiatement

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1+y_1=(\alpha_{11}+1)y_1+\alpha_{12}y_2, \\ x_2+y_2=\alpha_{21}y_1+(\alpha_{22}+1)y_2, \end{cases}$$

et, comme le déterminant (3) n'est pas nul, on peut tirer de ces équations, sans ambiguïté, y_1 et y_2 en fonction de x_1+y_1 et x_2+y_2. On obtient, par suite, les différences x_1-y_1 et x_2-y_2 exprimées, sans

ambiguïté, en fonction des sommes $x_1 + y_1$ et $x_2 + y_2$. Il vient

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 - y_1 = \dfrac{(\alpha_{11} - \alpha_{22})(x_1 + y_1) + 2\alpha_{12}(x_2 + y_2)}{2 + \alpha_{11} + \alpha_{22}}, \\ x_2 - y_2 = \dfrac{2\alpha_{21}(x_1 + y_1) + (\alpha_{22} - \alpha_{11})(x_2 + y_2)}{2 + \alpha_{11} + \alpha_{22}}. \end{cases}$$

Comme on a supposé que $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ était égal à $+1$, on a

$$\alpha_{11} - \alpha_{22} = 0, \qquad \alpha_{12} + \alpha_{21} = 0.$$

Si donc, λ_0 désignant une quantité quelconque différente de zéro, on détermine deux quantités λ_{12} et λ_{21} par les relations

$$(7)\qquad \frac{\alpha_{12}}{1 + \alpha_{11}} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0}, \qquad \lambda_{12} + \lambda_{21} = 0,$$

l'équation (6) peut s'écrire

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 - y_1 = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_0}(x_2 + y_2), \\ x_2 - y_2 = \dfrac{\lambda_{21}}{\lambda_0}(x_1 + y_1) \end{cases}$$

ou encore

$$(9)\qquad \begin{cases} \lambda_0 x_1 + \lambda_{21} x_2 = \lambda_0 y_1 + \lambda_{12} y_2, \\ \lambda_{12} x_1 + \lambda_0 x_2 = \lambda_{21} y_1 + \lambda_0 y_2. \end{cases}$$

Si l'on ajoute à la première des équations (9), multipliée par l'unité, la seconde des équations (9) multipliée par un facteur symbolique i_{12}, on peut mettre les deux termes de l'équation que l'on obtient sous forme d'un produit en posant

$$(10)\qquad \begin{cases} \lambda_0 x_1 + \lambda_{21} x_2 + i_{12}(\lambda_{12} x_1 + \lambda_0 x_2) \\ \quad = (\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12})(x_1 + i_{12} x_2), \\ \lambda_0 y_1 + \lambda_{12} y_2 + i_{12}(\lambda_{21} y_1 + \lambda_0 y_2) \\ \quad = (y_1 + i_{12} y_2)(\lambda_0 - i_{12}\lambda_{12}). \end{cases}$$

Pour que ces équations (10) soient vérifiées, il suffit de supposer que le symbole i_{12} vérifie l'équation

$$(11) \qquad i_{12}^2 = -1.$$

Les propriétés de ce symbole sont alors identiques à celles du symbole $\sqrt{-1}$, et l'on voit que le résultat de la multiplication de deux *expressions complexes*

$$(\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12}), \quad (x_1 + i_{12}x_2)$$

ne change pas si l'on change l'ordre des deux facteurs. En égalant les deux produits (10), on obtient l'équation symbolique

$$(12) \qquad (\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12})(x_1 + i_{12}x_2) = (y_1 + i_{12}y_2)(\lambda_0 - i_{12}\lambda_{12}),$$

qui comprend les deux équations (1). En multipliant les deux membres de cette équation (12) par l'expression $(\lambda_0 - i_{12}\lambda_{12})$ conjuguée de $(\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12})$, on obtient une équation

$$(13) \qquad (\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2)(x_1 + i_{12}x_2) = (y_1 + i_{12}y_2)(\lambda_0 - i_{12}\lambda_2)^2,$$

dont le premier membre contient en facteur la *norme* de $(\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12})$,

$$(13^*) \qquad \mathfrak{N}(\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12}) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2.$$

En prenant, comme point de départ, une substitution (1) pour laquelle le déterminant (3) n'est pas nul, nous sommes parvenus à l'équation symbolique (12), dans laquelle λ_0 est différent de zéro. Si nous prenons, inversement, comme point de départ, une quantité complexe quelconque $\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12}$ dont la partie réelle λ_0 soit différente de zéro (ou, si l'on veut, un système de deux quantités réelles λ_0, λ_{12}, la première quelconque mais différente de zéro, la seconde entièrement arbitraire), et si nous formons, à l'aide de cette quantité complexe, une équation (12), l'équation (13) qui se déduit de cette équation (12) donne, pour les variables x_1 et x_2, des fonctions linéaires (1) des variables y_1 et y_2 vérifiant l'équation (2). Les coefficients de ces fonc-

tions linéaires sont

$$(14)\qquad \alpha_{11}=\alpha_{22}=\frac{\lambda_0^2-\lambda_{12}^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2},\qquad \alpha_{12}=-\alpha_{21}=\frac{2\lambda_0\lambda_{12}}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2};$$

le déterminant $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}$ est égal à $+1$, et le déterminant (4) correspondant a pour valeur

$$(15)\qquad \frac{4\lambda_0^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2};$$

comme λ_0 est choisi différent de zéro, ce déterminant n'est pas nul. Ainsi toutes les quantités complexes $\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}$, dont la partie réelle λ_0 est différente de zéro, nous ramènent à des substitutions linéaires (1), au déterminant $+1$, pour lesquelles le déterminant (4) est différent de zéro. Nous conviendrons d'écrire simplement i, au lieu de i_{13}, dans ce qui va suivre.

Considérons maintenant une substitution linéaire liant les variables y_1, y_2 à de nouvelles variables z_1, z_2 de telle sorte qu'on ait

$$(16)\qquad y_1^2+y_2^2=z_1^2+z_2^2.$$

Prenons d'abord la substitution particulière

$$(17)\qquad y_1=-z_1,\qquad y_2=-z_2;$$

elle peut être remplacée par l'unique équation

$$(18)\qquad i(y_1+iy_2)=(z_1+iz_2)(-i).$$

En composant les substitutions (1) et (17), on obtient la substitution

$$(19)\qquad \begin{cases} x_1=-\alpha_{11}z_1-\alpha_{12}z_2,\\ x_2=-\alpha_{21}z_1-\alpha_{22}z_2;\end{cases}$$

en combinant les équations (12) et (18) correspondantes, on obtient l'équation

$$(20)\qquad i(\lambda_0+i\lambda_{12})(x_1+ix_2)=(z_1+iz_2)(-i)(\lambda_0-i\lambda_{12}).$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation (12) la quantité complexe $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ par la quantité complexe $i(\lambda_0 + i\lambda_{12})$, on obtient, comme substitution correspondante, au lieu de la substitution (1), la substitution (19) qui diffère de (1) en ce que tous ses coefficients sont multipliés par l'unité négative. Or toutes les substitutions linéaires à considérer se déduisent, comme nous l'avons vu, des substitutions (1) pour lesquelles le déterminant (4) n'est pas nul, en y ajoutant celles qui en dérivent en changeant le signe des coefficients. Toutes les substitutions linéaires en question sont donc représentées par l'ensemble des équations (12) et (20). Mais les quantités complexes

$$\lambda_0 + i\lambda_{12} \quad \text{et} \quad i(\lambda_0 + i\lambda_{12}),$$

où λ_0 n'est pas nul, représentent sans exception toutes les quantités complexes dont la norme est différente de zéro. Il en résulte que toutes les substitutions linéaires considérées sont représentées par les équations (12) ou, si l'on veut, par les équations (14), pourvu que les deux quantités réelles λ_0 et λ_{12} ne soient pas nulles simultanément, ou, en d'autres termes, pourvu que la norme de $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ ne soit pas nulle.

A l'aide d'une quantité complexe quelconque dont la norme n'est pas nulle $(\mu_0 + i\mu_{12})$, formons la relation analogue à (12)

$$(21) \qquad (\mu_0 + i\mu_{12})(y_1 + iy_2) = (z_1 + iz_2)(\mu_0 - i\mu_{12}),$$

à laquelle correspond une substitution linéaire, semblable à (1), nous permettant de passer des variables réelles y_1 et y_2 aux variables réelles z_1 et z_2. En appliquant successivement la substitution (1) et cette dernière substitution, nous obtenons une nouvelle substitution à laquelle correspond l'équation

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\mu_0 + i\mu_{12})(\lambda_0 + i\lambda_{12})(x_1 + ix_2) \\ &\quad = (z_1 + iz_2)(\mu_0 - i\mu_{12})(\lambda_0 - i\lambda_{12}); \end{aligned} \right.$$

dans cette équation paraît le produit des deux quantités complexes $(\mu_0 + i\mu_{12})$ et $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$; la norme de ce produit est différente de zéro parce que la norme de chacun des deux facteurs est différente de

zéro; on voit aussi qu'il est permis, sans rien changer au résultat, de permuter d'une manière quelconque l'ordre dans lequel on effectue les substitutions que l'on veut composer.

II.

Problème. — *Trouver tous les nombres complexes entiers dont la norme est égale à un nombre entier donné.*

Trouver toutes les substitutions rationnelles qui transforment une somme de deux carrés en elle-même.

Nous commencerons par chercher les conditions auxquelles doit satisfaire un entier positif m donné, pour pouvoir être égal à la norme d'un nombre complexe entier quelconque. Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, nous nous proposerons de trouver *tous* les nombres complexes entiers dont la norme est égale à m. Enfin nous chercherons à mettre, de toutes les manières possibles, chacun de ces nombres complexes entiers sous la forme d'un produit de nombres complexes entiers irréductibles. Pour abréger, nous dirons souvent *entier complexe* au lieu de nombre complexe entier et *nombre premier complexe* au lieu de nombre complexe entier irréductible.

On peut diviser les entiers complexes $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ en deux groupes : ceux pour lesquels les deux entiers réels λ_0 et λ_{12} n'ont pas de diviseur commun et ceux pour lesquels ils ont un diviseur commun; les entiers complexes du premier groupe sont les *entiers complexes proprement dits*, ceux du second groupe sont les *entiers complexes impropres*. Nous restreindrons le problème posé aux entiers complexes proprement dits.

Si $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ est un entier complexe proprement dit, les entiers λ_0 et λ_{12} ne peuvent être tous deux pairs; sa norme $(\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2)$ ne peut donc être qu'un nombre impair ou le double d'un nombre impair. Posons

$$\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 = m, \tag{1}$$

et désignons par p un quelconque des nombres premiers impairs qui

divisent m; soit γ le nombre de fois que m contient p en facteur. Je dis qu'on peut alors toujours trouver deux nombres entiers ξ_1 et ξ_2, qui ne soient pas divisibles par p tous les deux, et qui vérifient les congruences

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 \ \xi_1 + \lambda_{21} \xi_2 \equiv 0 \\ \lambda_{12} \xi_1 + \lambda_0 \ \xi_2 \equiv 0 \end{array} \right\} \qquad (\text{mod } p^\gamma).$$

Aucun des entiers λ_0 et λ_{12} ne peut être divisible par p; car, si l'un d'eux était divisible par p, l'autre le serait aussi à cause de la relation (1), et $\lambda_0 + i\lambda_{12}$ serait, par suite, un entier complexe impropre. Il en résulte que l'on peut vérifier chacune des deux congruences (2), sans tenir compte de l'autre, par des entiers ξ_1 et ξ_2. A l'aide de la relation (1), on montre facilement que, si l'une des deux congruences est vérifiée pour des entiers déterminés ξ_1 et ξ_2, l'autre est également vérifiée pour ces mêmes entiers. D'ailleurs, en ajoutant à la première de ces congruences multipliée par ξ_1 la seconde multipliée par ξ_2, et en observant que λ_0 n'est pas divisible par p, on obtient une nouvelle congruence

$$(3) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^\gamma)$$

vérifiée par les mêmes entiers ξ_1, ξ_2.

Si, dans la première congruence (2), on prend ξ_2 égal à l'unité, la valeur entière correspondante de ξ_1, $\xi_1 \equiv \omega$, est déterminée sans ambiguïté par la congruence

$$(4) \qquad \lambda_0 \omega + \lambda_{21} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^\gamma);$$

si nous donnons ensuite à ξ_2 une valeur entière quelconque non divisible par p, la valeur entière correspondante de ξ_1 est déterminée sans ambiguïté par la congruence

$$(5) \qquad \xi_1 \equiv \omega \xi_2 \qquad (\text{mod } p^\gamma);$$

ω vérifie d'ailleurs la congruence connue

$$(6) \qquad \omega^2 + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^\gamma).$$

Considérons donc tous les couples de nombres (ξ_1, ξ_2) qui satisfont aux congruences (2), sans être divisibles par p. On les obtient en multipliant les deux nombres de l'un quelconque d'entre eux par un même entier quelconque.

Si nous regardons comme équivalents et si nous groupons dans une même classe ces couples de nombres, chaque entier complexe $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ appartiendra, d'après ce qui précède, *à une classe bien déterminée* de solutions des congruences (2), de la congruence (3) ou, ce qui est identique, à une racine bien déterminée de la congruence (6). Il faut donc que cette congruence (6) soit possible pour que l'équation (1) ait lieu.

Or, d'après un théorème connu, cette congruence est possible ou ne l'est pas, selon que le reste de la division par 4 du nombre premier impair p est égal à 1 ou à 3; et, dans le premier cas, la congruence a toujours deux racines. Donc les entiers m qui ont des diviseurs premiers de la forme $4r + 3$ ne peuvent être représentés comme normes d'entiers complexes proprement dits, et il suffit de considérer les nombres m dont tous les diviseurs premiers impairs sont de la forme $4r + 1$. C'est pourquoi les nombres premiers de la forme $4r + 3$ qui, comme on le sait, jouent aussi le rôle de nombres premiers dans la théorie des nombres complexes entiers, ne paraissent pas dans la suite de nos recherches.

Je vais maintenant montrer que tout nombre premier impair p de la forme $4r + 1$ peut être mis sous la forme $\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2$, de manière que l'entier complexe correspondant $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ appartienne à une classe choisie à volonté parmi les deux classes de solutions de la congruence

$$(3') \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

ou, si l'on veut, appartienne à une racine choisie à volonté parmi les deux racines de la congruence

$$(6') \qquad \omega^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Observons d'abord que l'entier complexe cherché $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ ne

peut pas être le produit de deux entiers complexes dont les normes soient, toutes deux, différentes de l'unité; l'entier complexe cherché est donc nécessairement un nombre premier complexe, de sorte qu'une fois ce nombre entier complexe trouvé, nous n'aurons pas besoin de chercher encore à le mettre sous forme d'un produit de nombres premiers complexes. Ceci posé, fixons arbitrairement l'une des racines ω de la congruence

$$\omega^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

et formons, à l'aide de cette racine ω et d'un entier quelconque ξ_2 non divisible par p, le système d'entiers

$$(7) \qquad \xi_1 \equiv \omega\xi_2, \quad \xi_2 \pmod{p};$$

nous pouvons alors choisir, dans ce système, deux entiers, l'un congru à ξ_1, l'autre congru à ξ_2, qui soient numériquement plus petits que $\frac{p}{2}$. Ces deux entiers ne peuvent être simultanément divisibles par p; si donc τ est leur plus grand commun diviseur, τ n'est pas divisible par p.

Je désignerai par ρ_0 et ρ_{21} les deux entiers choisis divisés par τ, de sorte que

$$(8) \qquad \tau\rho_0 \equiv \xi_1, \qquad \tau\rho_{21} \equiv \xi_2 \pmod{p},$$

et je définirai ρ_{12} par l'équation

$$(9) \qquad \rho_{12} + \rho_{21} = 0.$$

La norme $\tau^2(\rho_0^2 + \rho_{12}^2)$ est divisible par p, et est plus petite que $\frac{1}{2}p^2$; son second facteur $\rho_0^2 + \rho_{12}^2$, qui est la norme de l'entier complexe

$$(\rho_0 + i\rho_{12}),$$

jouit donc des mêmes propriétés, et nous pouvons écrire, en désignant par t un entier plus petit que $\frac{p}{2}$,

$$(10) \qquad \rho_0^2 + \rho_{12}^2 = pt;$$

d'ailleurs, comme τ n'est pas divisible par p, nous avons les congruences

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \rho_0\,\xi_1 + \rho_{21}\,\xi_2 = 0 \\ \rho_{12}\,\xi_1 + \rho_0\,\xi_2 = 0 \end{array}\right\} \pmod p.$$

De l'entier complexe proprement dit $(\rho_0 + i\rho_{12})$ que nous venons de former, et auquel correspondent les relations (10) et (11), nous allons déduire un autre entier complexe proprement dit $[\rho_0' + i\rho_{12}']$, auquel correspondent des relations semblables à (10) et (11), mais pour lequel le multiple de p, dans la relation (10), est plus petit que t. Déterminons, à cet effet, les deux entiers ϱ_0 et ϱ_{12}, numériquement plus petits que $\frac{t}{2}$ ou au plus égaux à $\frac{t}{2}$, qui vérifient les congruences

$$(12)\qquad \varrho_0 \equiv \rho_0, \qquad \varrho_{12} \equiv \rho_{12} \qquad \pmod t.$$

Le nombre entier $\varrho_0^2 + \varrho_{12}^2$ contient alors t en facteur, et si nous posons

$$(13)\qquad \varrho_0^2 + \varrho_{12}^2 = t\,t^{(1)},$$

le nombre entier $t^{(1)}$ est plus petit ou au plus égal à $\frac{t}{2}$, et ne peut, par suite, être divisible par p, puisque t est plus petit que $\frac{p}{2}$. Formons ensuite le produit $(\varrho_0 - i\varrho_{12})(\rho_0 + i\rho_{12})$; ses deux éléments réels $\varrho_0\rho_0 + \varrho_{12}\rho_{12}$ et $\varrho_0\rho_{12} - \rho_0\varrho_{12}$ sont divisibles par t; sa norme est égale à $pt^2t^{(1)}$; elle est donc divisible par p, mais n'est pas divisible par p^2; donc, le plus grand commun diviseur de $\varrho_0\rho_0 + \varrho_{12}\rho_{12}$ et de $\varrho_0\rho_{12} - \rho_0\varrho_{12}$ est égal à $\tau^{(1)}t$, où $\tau^{(1)}$ n'est pas divisible par p. Nous pouvons ainsi définir un entier complexe proprement dit $[\rho_0' + i\rho_{12}']$ par l'équation

$$(14)\qquad (\varrho_0 - i\varrho_{12})(\rho_0 + i\rho_{12}) = \tau^{(1)}t\,[\rho_0' + i\rho_{12}'].$$

On déduit maintenant facilement des congruences (11), par multiplication et addition, les congruences

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \tau^{(1)}t\,[\rho_0'\,\xi_1 + \rho_{21}'\,\xi_2] = 0 \\ \tau^{(1)}t\,[\rho_{12}'\,\xi_1 + \rho_0'\,\xi_2] = 0 \end{array}\right\} \pmod p.$$

qui entraînent, comme ni $\tau^{(1)}$, ni t ne sont divisibles par p, les congruences

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} \rho_0^{(1)}\xi_1 + \rho_{21}^{(1)}\xi_2 \equiv 0 \\ \rho_{12}^{(1)}\xi_1 + \rho_0^{(1)}\xi_2 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{p}.$$

D'autre part, les équations (10), (13) et (14) donnent immédiatement la relation

$$(17)\qquad [\rho_0^{(1)}]^2 + [\rho_{12}^{(1)}]^2 = p\,\frac{t^{(1)}}{[\tau^{(1)}]^2},$$

et, comme $t^{(1)}$ n'est pas plus grand que $\frac{t}{2}$, le nombre entier $\frac{t^{(1)}}{[\tau^{(1)}]^2}$ vérifie nécessairement l'inégalité $\frac{t^{(1)}}{[\tau^{(1)}]^2} \leq \frac{t}{2}$, et est, par suite, plus petit que t. Les relations (16) et (17), formées à l'aide de $\rho_0^{(1)}$ et $\rho_{12}^{(1)}$ sont bien semblables aux relations (11) et (10) formées à l'aide de ρ_0 et ρ_{12}, et le multiple entier de p dans la relation (17) est plus petit que t.

Rien n'empêche de répéter le même raisonnement et de former ainsi successivement des entiers complexes $[\rho_0^{(2)} + i\rho_{12}^{(2)}]$, $[\rho_0^{(3)} + i\rho_{12}^{(3)}]$, etc., vérifiant comme $(\rho_0 + i\rho_{12})$ et $[\rho_0^{(1)} + i\rho_{12}^{(1)}]$ les relations (10) et (11), et ayant dans l'équation (10) comme multiple de p un nombre entier de plus en plus petit, jusqu'à ce qu'enfin cet entier soit égal à l'unité. On arrive ainsi à former un entier complexe $[\rho_0^{(s)} + i\rho_{12}^{(s)}]$, dont les éléments $\rho_0^{(s)}$, $\rho_{12}^{(s)}$ vérifient les relations

$$(18)\qquad (\rho_0^{(s)})^2 + (\rho_{12}^{(s)})^2 = p,$$

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} \rho_0^{(s)}\xi_1 + \rho_{21}^{(s)}\xi_2 \equiv 0 \\ \rho_{12}^{(s)}\xi_1 + \rho_0^{(s)}\xi_2 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{p},$$

et qui jouit, par suite, des deux propriétés d'avoir une norme égale au nombre premier impair donné et d'appartenir à une classe donnée de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 \equiv 0 \pmod{p}$.

Les entiers complexes que l'on obtient en multipliant $(\rho_0^{(s)} + i\rho_{12}^{(s)})$ par une des quatre unités $1, -1, i, -i$, appartiennent manifestement à la même classe de solutions de la congruence (3*). Nous choisirons arbitrairement l'un de ces quatre entiers complexes pour nous en servir dans les calculs suivants.

On peut aussi représenter le nombre premier impair p comme norme du nombre premier complexe $(\varrho_0^{s_1} - i\varrho_{12}^{s_1})$ conjugué de $(\varrho_0^{s} + i\varrho_{12}^{s})$; mais ce nombre premier complexe $(\varrho_0^{s} - i\varrho_{12}^{s_1})$ n'appartient pas à la même classe de solutions de la congruence (3*) que $(\varrho_0^{s} + i\varrho_{12}^{s_1})$. Il appartient, en effet, à la classe de solutions de la congruence (3*) dont le système $(\xi_1, -\xi_2)$ fait partie, et les deux systèmes (ξ_1, ξ_2) et $(\xi_1, -\xi_2)$ ne peuvent être équivalents, puisque, s'ils l'étaient, $2\xi_2$ serait divisible par p, ce qui n'est pas. Les quatre nombres premiers complexes, que l'on obtient en multipliant $(\varrho_0^{s} - i\varrho_{12}^{s_1})$ par les quatre unités $1, -1, i, -i$, appartiennent manifestement à la même classe et nous choisirons aussi l'un de ces quatre entiers pour nous en servir dans les calculs suivants.

Avant d'aller plus loin, il nous faut chercher la condition nécessaire et suffisante pour que la partie réelle et la partie imaginaire du produit de deux entiers complexes proprement dits $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ et $(\mu_0 + i\mu_{12})$ soient divisibles par une puissance p^γ d'un nombre premier impair p. Des deux congruences

$$(20) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mu_0\lambda_0 - \mu_{12}\lambda_{12} \equiv 0 \\ \mu_0\lambda_{12} + \mu_{12}\lambda_0 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{p^\gamma},$$

on déduit les congruences

$$(21) \quad \mu_0(\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2) \equiv 0, \qquad \mu_{12}(\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2) \equiv 0 \qquad \pmod{p^\gamma}.$$

$$(22) \quad (\mu_0^2 + \mu_{12}^2)\lambda_0 \equiv 0, \qquad (\mu_0^2 + \mu_{12}^2)\lambda_{12} \equiv 0 \qquad \pmod{p^\gamma}.$$

Comme μ_0 et μ_{12} sont premiers entre eux, la norme $\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2$ est nécessairement divisible par p^γ, et comme λ_0 et λ_{12} sont premiers entre eux, la norme $\mu_0^2 + \mu_{12}^2$ est aussi divisible par p^γ. Donc, d'après ce qui précède, les entiers complexes proprement dits $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ et $(\mu_0 + i\mu_{12})$ appartiennent, le premier à une classe déterminée de solutions (ξ_1, ξ_2), le second à une classe déterminée de solutions (η_1, η_2) de la congruence (3). Si l'on convient de dire qu'un entier complexe est congru à zéro suivant un module entier réel lorsque sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes deux divisibles par cet entier réel, on peut réunir en une seule les deux congruences (2) qui définissent

le système (ξ_1, ξ_2) et écrire

$$(23) \qquad (\lambda_0 + i\lambda_{12})(\xi_1 + i\xi_2) \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

De même, au lieu des congruences (20), on peut écrire

$$(24) \qquad (\mu_0 + i\mu_{12})(\lambda_0 + i\lambda_{12}) \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

La congruence (23) montre que la solution (ξ_1, ξ_2) est équivalente à $(\lambda_0, -\lambda_{12})$; de même, la solution (η_1, η_2) est équivalente à $(\mu_0, -\mu_{12})$. Mais la congruence (24) montre que (μ_0, μ_{12}) est équivalent à $(\lambda_0, -\lambda_{12})$. La condition nécessaire demandée est donc que chacune des normes $\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2$ et $\mu_0^2 + \mu_{12}^2$ soit divisible par p^γ et que les solutions (μ_0, μ_{12}) et $(\lambda_0, -\lambda_{12})$ de la congruence (3) soient équivalentes. En répétant le même raisonnement dans l'ordre inverse, on voit facilement que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes. Nous ferons plusieurs fois usage de ce lemme.

On peut maintenant former un entier complexe proprement dit dont la norme soit égale à une puissance donnée p^γ d'un nombre premier impair et qui appartienne à une classe donnée (ζ_1, ζ_2) de solutions de la congruence (3). A cet effet, on commencera, en suivant la méthode indiquée plus haut, par former un nombre premier complexe $(\rho_0 + i\rho_{12})$ dont la norme soit égale à p et qui appartienne à une classe donnée (ξ_1, ξ_2) de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Nous pouvons considérer la solution (ζ_1, ζ_2) de la congruence (3) comme solution de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 \equiv 0 \pmod{p}$; (ζ_1, ζ_2) est alors équivalent à (ξ_1, ξ_2) ou à $(\xi_1, -\xi_2)$: en admettant que ce soit à (ξ_1, ξ_2) nous ne faisons aucune restriction; car, si c'était à $(\xi_1, -\xi_2)$, l'entier complexe $(\rho_0 - i\rho_{12})$ conjugué de $(\rho_0 + i\rho_{12})$ appartiendrait à la classe représentée par (ξ_1, ξ_2) et pourrait être substitué dans ce qui suit à $(\rho_0 + i\rho_{12})$. Ainsi, en considérant les congruences suivant le module p, nous pouvons admettre que le système (ζ_1, ζ_2) est équivalent au système (ξ_1, ξ_2) et que le système $(\zeta_1, -\zeta_2)$ est équivalent au système $(\xi_1, -\xi_2)$. On formera ensuite les puissances successives de $(\rho_0 + i\rho_{12})$; d'après le lemme démontré, les parties réelles et imaginaires de ces puissances ne peuvent être toutes deux divisibles par p; or tout autre

diviseur premier que p, commun à ces deux parties, est impossible puisque $\rho_0^2 + \rho_{12}^2 = p$; donc elles sont premières entre elles. De plus, si l'on prend les congruences suivant le module p^γ, l'entier complexe $(\rho_0 + i\rho_{12})^\gamma$ ne peut appartenir qu'à la classe représentée par le système (ζ_1, ζ_2) ou à la classe représentée par le système $(\zeta_1, -\zeta_2)$; la seconde alternative est impossible, car il en résulterait, si nous prenons les congruences suivant le module p, que l'entier complexe $(\rho_0 + i\rho_{12})^\gamma$ appartient à la classe représentée par le système $(\xi_1, -\xi_2)$ équivalent au système $(\zeta_1, -\zeta_2)$; tandis que la congruence

$$(\xi_1 + i\xi_2)^2 \equiv 2\xi_1(\xi_1 + i\xi_2) \qquad (\bmod p)$$

montre, au contraire, que, les congruences étant prises suivant le module p, une puissance quelconque de $(\rho_0 + i\rho_{12})$ appartient à la classe représentée par le système (ξ_1, ξ_2); donc, les congruences étant prises suivant le module p^γ, l'entier complexe $(\rho_0 + i\rho_{12})^\gamma$, dont la norme est p^γ, appartient nécessairement à la classe représentée par le système (ζ_1, ζ_2).

Soit enfin un entier impair quelconque m, ne contenant que des facteurs premiers de la forme $(4r+1)$,

$$m = p^\gamma q^\delta \ldots.$$

Pour trouver un entier complexe dont la norme soit égale à m et qui appartienne à des classes données de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 \equiv 0$, prise suivant les modules p^γ, $q^\delta, \ldots.$, nous chercherons les nombres premiers complexes $(\rho_0 + i\rho_{12})$, $(\sigma_0 + i\sigma_{12}), \ldots$ appartenant aux classes correspondantes de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 \equiv 0$ prise suivant les modules $p, q, \ldots$ et nous formerons le produit

$$(\rho_0 + i\rho_{12})^\gamma (\sigma_0 + i\sigma_{12})^\delta \ldots\ldots = a + ib;$$

nous aurons alors $a^2 + b^2 = m$ et l'entier complexe proprement dit $(a + ib)$, dont les deux éléments a et b sont incongrus suivant le module 2, sera le nombre complexe entier cherché.

Si l'entier donné m est le double d'un entier impair ne contenant que des facteurs premiers de la forme $4r+1$, nous pouvons appliquer

ce qui précède à l'entier $\frac{m}{2}$ et former un entier complexe $a' + ib'$ dont la norme soit égale à $\frac{m}{2}$; mais alors, comme $(1 + i)$ est un nombre premier complexe, dont la norme est égale à 2, le produit

$$(1 + i)(a' + ib') = a + ib$$

est l'entier complexe cherché dont la norme est égale à m.

Pour tous les entiers m qui peuvent être normes d'entiers complexes proprement dits, nous avons donc trouvé, et représenté comme produits de nombres premiers complexes, des entiers complexes proprement dits, dont la norme est m, appartenant à toutes les classes possibles. Nous montrerons, pour terminer, qu'en multipliant successivement les entiers complexes proprement dits trouvés par chacune des quatre unités, nous obtenons *tous* les entiers complexes proprement dits qui vérifient l'équation (1) et chacun *une fois* seulement.

Quand un nombre complexe entier proprement dit $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ est donné et que sa norme m ou la moitié de sa norme est égale au produit $p^\gamma . q^\delta \ldots$, où les facteurs premiers impairs $p, q, \ldots$ sont nécessairement de la forme $4r + 1$, on peut mettre ce nombre complexe entier sous la forme d'un produit de nombres premiers complexes de la manière suivante : on cherche d'abord les classes de solutions, prises suivant les module p^γ, q^δ, ..., auxquelles appartient le nombre complexe donné $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$; on détermine ensuite les nombres premiers complexes $(\rho_0 + i\lambda_{12})$, $(\sigma_0 + i\sigma_{12})$, ..., dont les normes sont $p, q, \ldots$, et qui appartiennent aux classes de solutions correspondant aux précédentes, mais prises suivant les modules $p, q, \ldots$ (d'après une remarque faite plus haut, ces nombres premiers complexes sont déterminés sans ambiguïté); enfin on forme le produit

$$(\rho_0 + i\rho_{12})^\gamma (\sigma_0 + i\sigma_{12})^\delta \ldots,$$

que l'on multiplie encore par le facteur $(1 + i)$ quand le nombre entier m est le double d'un nombre impair; on obtient ainsi un entier complexe que nous désignerons par $(a + ib)$.

Le lemme démontré et ce qui précède montrent que la partie réelle

et la partie imaginaire du produit

$$(\lambda_0 + i\lambda_{12})(a - ib)$$

sont toutes deux divisibles par m. Donc, comme la norme de ce produit est égale à m^2, ce produit lui-même est égal à l'entier m multiplié par l'une des quatre unités $1, -1, i, -i$. Si m est un nombre premier impair, il en résulte que l'entier complexe $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ est égal à l'une des quatre unités multipliée par le nombre premier complexe $(\varrho_0 + i\varrho_{12})$ appartenant à la même classe de solutions et défini sans ambiguïté. Dans le cas le plus général, l'entier complexe proprement dit donné $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ est, de même, égal à l'une des quatre unités multipliée par le produit de nombres premiers complexes définis sans ambiguïté et entièrement déterminés, sauf toutefois l'ordre dans lequel ils sont rangés dans le produit. Ceci montre que nous obtenons bien, par le procédé indiqué plus haut, *tous* les entiers complexes proprement dits vérifiant l'équation (1); chacun de ces entiers complexes est mis de toutes les manières possibles sous forme de produit de nombres premiers complexes si l'on range ces nombres premiers complexes de toutes les manières possibles. Le nombre d'entiers complexes proprement dits que l'on obtient ainsi est égal, comme on le voit immédiatement, à 4.2^n, où n désigne le nombre de facteurs premiers impairs différents contenus dans m.

On conclut des relations (7) du § I que toutes les substitutions rationnelles dont le déterminant est égal à $+1$, qui transforment une somme de deux carrés en elle-même, conduisent à un entier complexe proprement dit $\pm(\lambda_0 + i\lambda_{12})$; on obtient donc toutes ces substitutions en donnant dans les équations (14) du § I

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{\lambda_0^2 - \lambda_{12}^2}{\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2}, \qquad \alpha_{12} = -\alpha_{21} = \frac{2\lambda_0\lambda_{12}}{\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2},$$

à λ_0 et à λ_{12} toutes les valeurs entières possibles pour lesquelles $(\lambda_0 + i\lambda_{12})$ est un entier complexe proprement dit. On peut facilement reconnaître dans quel cas les deux numérateurs et le dénominateur $\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2$ de ces expressions ont un diviseur commun. Ce diviseur doit également diviser $2\lambda_0^2$ et $2\lambda_{12}^2$; donc, comme λ_0 et λ_{12} et, par suite aussi,

λ_0^2 et λ_{12}^2 sont premiers entre eux, ce diviseur commun ne peut être que l'un des deux nombres 1 ou 2. Lorsque $\lambda_0^2 + \lambda_{12}$ est un entier impair, le numérateur $\lambda_0^2 - \lambda_{12}^2$ de α_{11} est impair; lorsque $\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2$ est le double d'un entier impair, $\lambda_0^2 - \lambda_{12}^2$ est pair; le numérateur $2\lambda_0\lambda_{12}$ de α_{12} est évidemment toujours pair. Pour les valeurs de λ_0 et λ_{12}, pour lesquelles le dénominateur est un nombre impair, il n'y a donc pas d'autre diviseur commun aux deux numérateurs et au dénominateur que l'unité. Pour les valeurs de λ_0 et λ_{12} pour lesquelles le dénominateur est pair, le diviseur commun est le nombre 2; on peut simplifier et le dénominateur réduit est alors un nombre impair comme dans le cas précédent. Ainsi les coefficients de toute substitution rationnelle qui transforme une somme de deux carrés en elle-même ont, comme dénominateur commun réduit, un nombre entier impair dont tous les facteurs premiers sont de la forme $4r + 1$.

III.

Transformation réelle d'une somme de trois carrés en elle-même et définition des quaternions.

Si une substitution linéaire à coefficients réels $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}; \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}; \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$, qui représente les variables réelles x_1, x_2, x_3 en fonction des variables réelles y_1, y_2, y_3, transforme la somme des carrés des premières variables dans la somme des carrés des dernières, on a, à la fois, les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3, \\ x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3, \\ x_3 = \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3, \end{cases}$$

$$(2)\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Le déterminant de substitution ne peut alors être égal qu'à $+1$ ou à -1; supposons-le égal à $+1$. L'équation (2) est évidemment encore vérifiée, et la valeur du déterminant ne change pas si, au lieu de la substitution (1), nous en employons une autre déduite de (1) en mul-

tipliant par l'unité négative deux quelconques des trois colonnes de coefficients.

De chacun des quatre systèmes ainsi obtenus, on peut déduire un nouveau système en ajoutant l'unité à tous les éléments de celle des diagonales du déterminant de substitution correspondant qui joint le premier élément à gauche au dernier élément à droite. Les déterminants de ces quatre nouveaux systèmes,

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}+1 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}+1 \end{vmatrix},$$

$$(3_a)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+1 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & -\alpha_{22}+1 & -\alpha_{23} \\ \alpha_{31} & -\alpha_{32} & -\alpha_{33}+1 \end{vmatrix},$$

$$(3_b)\qquad \begin{vmatrix} -\alpha_{11}+1 & \alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22}+1 & -\alpha_{23} \\ -\alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{33}+1 \end{vmatrix},$$

$$(3_c)\qquad \begin{vmatrix} -\alpha_{11}+1 & -\alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22}+1 & \alpha_{23} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & \alpha_{33}+1 \end{vmatrix}$$

sont respectivement égaux à

$$(4)\qquad 2+2\alpha_{11}+2\alpha_{22}+2\alpha_{33},$$

$$(4_a)\qquad 2+2\alpha_{11}-2\alpha_{22}-2\alpha_{33},$$

$$(4_b)\qquad 2-2\alpha_{11}+2\alpha_{22}-2\alpha_{33},$$

$$(4_c)\qquad 2-2\alpha_{11}-2\alpha_{22}+2\alpha_{33};$$

on le voit facilement, en tenant compte de ce que chaque élément du déterminant est égal au mineur correspondant. La somme de ces quatre valeurs étant égale au nombre 8, l'un au moins des quatre déterminants a une valeur différente de zéro. Cette remarque permet de supposer que le système donné de coefficients $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ est

tel que la valeur du déterminant (3) correspondant est différente de zéro. Nous ferons cette hypothèse dans tout ce qui suivra.

Les équations (1) donnent immédiatement

$$(5)\quad \begin{cases} x_1+y_1=(\alpha_{11}+1)y_1+\alpha_{12}y_2+\alpha_{13}y_3,\\ x_2+y_2=\alpha_{21}y_1+(\alpha_{22}+1)y_2+\alpha_{23}y_3,\\ x_3+y_3=\alpha_{31}y_1+\alpha_{32}y_2+(\alpha_{33}+1)y_3,\end{cases}$$

et, comme le déterminant (3) n'est pas nul, on peut tirer de ces équations, sans ambiguïté, y_1, y_2 et y_3 en fonction de x_1+y_1, x_2+y_2 et x_3+y_3. On obtient, par suite, les différences x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3 exprimées, sans ambiguïté, en fonction des sommes x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3. Il vient

$$(6)\quad \begin{cases} x_1-y_1=\dfrac{(\alpha_{12}-\alpha_{21})(x_2+y_2)+(\alpha_{13}-\alpha_{31})(x_3+y_3)}{1+\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}},\\ x_2-y_2=\dfrac{(\alpha_{21}-\alpha_{12})(x_1+y_1)+(\alpha_{23}-\alpha_{32})(x_3+y_3)}{1+\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}},\\ x_3-y_3=\dfrac{(\alpha_{31}-\alpha_{13})(x_1+y_1)+(\alpha_{32}-\alpha_{23})(x_2+y_2)}{1+\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}}.\end{cases}$$

On peut représenter les coefficients qui paraissent dans ces relations (ils forment un système gauche) par des fractions ayant un dénominateur quelconque différent de zéro. Nous poserons

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha_{12}-\alpha_{21}}{1+\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}}=\dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_0}, & \lambda_{12}+\lambda_{21}=0,\\ \dfrac{\alpha_{13}-\alpha_{31}}{1+\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}}=\dfrac{\lambda_{13}}{\lambda_0}, & \lambda_{13}+\lambda_{31}=0,\\ \dfrac{\alpha_{23}-\alpha_{32}}{1+\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}}=\dfrac{\lambda_{23}}{\lambda_0}, & \lambda_{23}+\lambda_{32}=0.\end{cases}$$

Au lieu des équations (6), nous pouvons alors écrire simplement

$$(8)\quad \begin{cases} x_1-y_1=\dfrac{\lambda_{12}(x_2+y_2)+\lambda_{13}(x_3+y_3)}{\lambda_0},\\ x_2-y_2=\dfrac{\lambda_{21}(x_1+y_1)+\lambda_{23}(x_3+y_3)}{\lambda_0},\\ x_3-y_3=\dfrac{\lambda_{31}(x_1+y_1)+\lambda_{32}(x_2+y_2)}{\lambda_0}\end{cases}$$

ou encore, en multipliant par λ_0,

$$(9)\qquad \begin{cases} \lambda_0\, x_1 + \lambda_{21} x_2 + \lambda_{31} x_3 = \lambda_0\, y_1 + \lambda_{12} y_2 + \lambda_{13} y_3, \\ \lambda_{12} x_1 + \lambda_0\, x_2 + \lambda_{32} x_3 = \lambda_{21} y_1 + \lambda_0\, y_2 + \lambda_{23} y_3, \\ \lambda_{13} x_1 + \lambda_{23} x_2 + \lambda_0\, x_3 = \lambda_{31} y_1 + \lambda_{32} y_2 + \lambda_0\, y_3. \end{cases}$$

Dans ce système d'equations linéaires, le déterminant des coefficients des premiers membres est égal au déterminant des coefficients des seconds membres; la valeur commune de ces deux déterminants est

$$(9^*)\qquad \lambda_0(\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2).$$

Si l'on ajoute les trois équations (9) multipliées respectivement par λ_{23}, λ_{31}, λ_{12}, on obtient, en divisant les deux membres par λ_0 qui est différent de zéro, l'équation

$$(10)\qquad \lambda_{23} x_1 + \lambda_{31} x_2 + \lambda_{12} x_3 = \lambda_{23} y_1 + \lambda_{31} y_2 + \lambda_{12} y_3.$$

En joignant cette équation aux équations (9), on a un système de quatre équations dans lequel chacune des six colonnes contient les mêmes quatre éléments λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23}, seulement dans un ordre différent et avec des signes parfois différents. Ajoutons, d'une part, les quatre premiers membres de ces équations, multipliés le premier par l'unité, les trois suivants par des symboles i_{12}, i_{13}, i_{23}; d'autre part, les quatre seconds membres de ces équations multipliés dans le même ordre par l'unité et les mêmes symboles; et demandons-nous s'il ne serait pas possible de soumettre les symboles i_{12}, i_{13}, i_{23} à des règles de calcul telles que les deux sommes obtenues pussent être mises sous forme de produits de deux facteurs. Pour que la première somme soit égale au produit

$$(11)\qquad (\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23})(x_1 + i_{12} x_2 + i_{13} x_3)$$

et que la seconde somme soit égale au produit

$$(12)\qquad (y_1 + i_{12} y_2 + i_{13} y_3)(\lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23}),$$

il faut et il suffit que les symboles i_{12}, i_{13}, i_{23} vérifient les relations

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{lll} i_{12}^2 = -1, & i_{13}^2 = -1; & \\ i_{12}i_{13} = \quad i_{23}, & i_{12}i_{23} = -i_{13}, & i_{13}i_{23} = \quad i_{12}; \\ i_{13}i_{12} = -i_{23}, & i_{23}i_{12} = \quad i_{13}, & i_{23}i_{13} = -i_{12}. \end{array}\right.$$

Pour que les symboles vérifient en outre la *loi d'associativité*, c'est-à-dire pour que l'on puisse grouper d'une manière arbitraire les divers facteurs d'un produit, sans toutefois changer l'ordre de ces facteurs, il faut et il suffit que l'on ait

$$(13^*)\qquad i_{23}^2 = -1.$$

Si nous supposons enfin que les symboles soient liés par les relations

$$(14)\qquad i_{21} = -i_{12}, \qquad i_{31} = -i_{13}, \qquad i_{32} = -i_{23},$$

nous pouvons, sans rien changer aux relations précédentes, permuter les indices 1, 2, 3 des symboles. En posant

$$(15)\qquad i = i_{12}, \qquad j = i_{23}, \qquad k = -i_{13},$$

nous observons que les relations établies sont identiques aux règles de calcul que Hamilton a introduites pour les unités des quaternions; l'expression

$$(16)\qquad \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23}$$

devient alors le quaternion

$$(17)\qquad \lambda_0 + i\lambda_{12} + j\lambda_{23} + k\lambda_{31}.$$

On peut condenser les règles de calcul données par les relations (13), (13*) et (14), en supposant que les unités i_{12}, i_{13}, i_{23} soient formées à l'aide de trois *symboles primitifs* k_1, k_2, k_3 de la manière suivante,

$$(18)\qquad i_{12} = k_1k_2, \qquad i_{13} = k_1k_3, \qquad i_{23} = k_2k_3,$$

que la loi d'associativité ait lieu pour ces trois symboles primitifs, et enfin *que l'on ait*

$$(19) \qquad \text{Pour } a = b, \quad k_a k_b = -1 \qquad (a, b = 1, 2, 3),$$

$$(20) \qquad \text{Pour } a \gtrless b, \quad k_a k_b = -k_b k_a \qquad (a, b = 1, 2, 3).$$

Ceci posé, égalons les deux expressions (11) et (12) déduites des premiers et des seconds membres des équations (9) et (10). En introduisant les symboles Λ, Λ_1, X, Y, définis par les équations

$$(21) \quad \begin{cases} \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23} = \Lambda, & x_1 + i_{12}x_2 + i_{13}x_3 = X, \\ \lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23} = \Lambda_1, & y_1 + i_{12}y_2 + i_{13}y_3 = Y, \end{cases}$$

il vient

$$(22) \qquad \Lambda X = Y \Lambda_1.$$

Les équations (9) et (10) sont condensées dans l'unique équation symbolique (22).

Il résulte immédiatement des règles de calcul posées pour les trois symboles i_{12}, i_{13}, i_{23} que le produit de deux quaternions est un quaternion; qu'en intervertissant l'ordre des facteurs, le produit n'est plus le même; qu'en faisant le produit de plusieurs quaternions, la loi d'associativité a lieu; enfin que, si l'on nomme *quaternion conjugué au quaternion* Λ le quaternion

$$(23) \qquad \Lambda' = \lambda_0 + i_{21}\lambda_{12} + i_{31}\lambda_{13} + i_{32}\lambda_{23}$$

et *norme du quaternion* Λ le produit $\Lambda\Lambda'$ du quaternion Λ par son conjugué Λ', on a

$$(24) \qquad \mathfrak{N}\Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2;$$

le quaternion conjugué de Λ' est manifestement Λ, et l'on a

$$\mathfrak{N}\Lambda' = \mathfrak{N}\Lambda.$$

L'expression que nous venons de trouver pour cette norme est le

second facteur du déterminant (9*). (*Comparez* HAMILTON, *Lectures on Quaternions*, p. 87.)

En prenant comme point de départ une substitution (1), pour laquelle le déterminant (3) n'est pas nul, nous sommes parvenus à l'équation symbolique (22), dans laquelle λ_0 est différent de zéro. Si nous prenons inversement comme point de départ un quaternion quelconque Λ dont la partie réelle λ_0 soit différente de zéro et si nous formons, à l'aide de ce quaternion, une équation (22), nous en déduisons les équations (9) et (10) correspondantes, et l'équation (10) est une conséquence des équations (9). Mais ces équations (9) nous montrent immédiatement que l'équation (2) est vérifiée, et, comme le déterminant (9*) est différent de zéro, nous obtenons, en résolvant les équations (9) par rapport à x_1, x_2, x_3, une substitution (1) entièrement déterminée; son déterminant est d'ailleurs égal à $+1$. Cette substitution, qui a été donnée pour la première fois par Euler, est la suivante :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\lambda_0^2-\lambda_{12}^2-\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}y_1 \\
&\quad + \frac{2(\lambda_0\lambda_{12}-\lambda_{13}\lambda_{23})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}y_2 + \frac{2(\lambda_0\lambda_{13}+\lambda_{12}\lambda_{23})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}y_3, \\
x_2 &= \frac{2(-\lambda_0\lambda_{12}-\lambda_{13}\lambda_{23})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}y_1 \\
&\quad + \frac{\lambda_0^2-\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2-\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}y_2 + \frac{2(-\lambda_0\lambda_{23}-\lambda_{12}\lambda_{13})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}y_3, \\
x_3 &= \frac{2(-\lambda_0\lambda_{13}+\lambda_{12}\lambda_{23})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}y_1 \\
&\quad + \frac{2(\lambda_0\lambda_{23}-\lambda_{12}\lambda_{13})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}y_2 + \frac{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2-\lambda_{13}^2-\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}y_3.
\end{aligned}\right.$$

On la trouve dans le Mémoire d'Euler, intitulé : *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile* (*N. Comm.*, XV, p. 75, 1770; *Exhib.*, 1770, Mart. 5, *Comm. ar.*, I, p. 427). Dans une Note publiée parmi ses Œuvres posthumes dans le Tome III de ses Œuvres complètes, et intitulée : *Bemerkungen zu einer Abhandlung Euler's über die orthogonale Substitution*, Jacobi a montré un intérêt particulier pour ce Mémoire d'Euler.

Le déterminant (3), correspondant à la substitution (25), est égal à

$$(26)\qquad \frac{8\lambda_0^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2};$$

sa valeur est donc différente de zéro.

Ainsi tous les quaternions A, dont la partie réelle λ_0 est différente de zéro, nous ramènent à des substitutions linéaires (1), à déterminant $+1$, pour lesquelles le déterminant (3) est différent de zéro.

Comme on peut déduire une substitution (1), de déterminant $+1$, à déterminant (3) différent de zéro et telle que l'équation (2) soit encore vérifiée, en changeant les signes des coefficients de deux des colonnes d'une substitution (1) donnée, on obtient toutes les substitutions (1) considérées en composant les substitutions (1) obtenues jusqu'ici avec celles qui ont simplement pour effet de changer les signes des coefficients de deux colonnes. Les signes de la deuxième et de la troisième colonne sont changés par la substitution

$$y_1 = z_1, \qquad y_2 = -z_2, \qquad y_3 = -z_3,$$

que l'on peut remplacer par l'équation

$$(27)\qquad i_{23}(y_1 + i_{12}y_2 + i_{13}y_3) = (z_1 + i_{12}z_2 + i_{13}z_3)i_{23}.$$

Les signes de la première et de la troisième colonne sont changés par une substitution que l'on peut remplacer par l'équation

$$(27_a)\qquad i_{31}(y_1 + i_{12}y_2 + i_{13}y_3) = (z_1 + i_{12}z_2 + i_{13}z_3)(-i_{31}),$$

et les signes de la première et de la deuxième colonne sont changés par une substitution que l'on peut remplacer par l'équation

$$(27_b)\qquad i_{12}(y_1 + i_{12}y_2 + i_{13}y_3) = (z_1 + i_{12}z_2 + i_{13}z_3)(-i_{12}).$$

En posant

$$(28)\qquad z_1 + i_{12}z_2 + i_{13}z_3 = Z,$$

et successivement

$$(29)\qquad \begin{cases} I = i_{23}, & i_{31}, & i_{12}, \\ I_1 = i_{23}, & -i_{31}, & -i_{12}, \end{cases}$$

on peut écrire ces équations (27), (27_a), (27_b),

$$(30)\qquad IY = ZI_1,$$

et comme, d'après la relation (22), $\Lambda X = Y\Lambda_1$, on a, en combinant les relations (22) et (30) et en faisant usage de la loi d'associativité,

$$(31)\qquad I\Lambda X = ZI_1\Lambda_1.$$

Cette relation, qui se déduit de la relation (22) en y remplaçant Λ par $I\Lambda$, jointe à la relation (22), représente, d'après ce que nous avons observé tout à l'heure, toutes les substitutions (1) considérées qui vérifient les équations (2), et dont le déterminant est égal à $+1$. Or un quaternion Λ dont la partie réelle est différente de zéro devient, lorsqu'on le multiplie par $I = i_{23}, i_{31}, i_{12}$, un nouveau quaternion dont la norme n'a pas changé et dont le coefficient de i_{23}, i_{31}, i_{12} est successivement différent de zéro; les quaternions Λ et $I\Lambda$, qui paraissent dans les équations (22) et (31), représentent donc tous les quaternions dont l'un au moins des coefficients est différent de zéro, c'est-à-dire tous les quaternions dont la norme n'est pas nulle. On pourra donc remplacer l'ensemble des relations (22) et (31), où la partie réelle λ_0 du quaternion Λ est supposée différente de zéro, par l'unique relation (22), en convenant de ne plus soumettre le quaternion Λ qu'à la restriction d'avoir une norme différente de zéro.

Ainsi la relation (22), dans laquelle Λ désigne un quaternion quelconque dont la norme n'est pas nulle, représente toutes les substitutions linéaires considérées. Les équations (25) ont maintenant lieu pour des valeurs réelles quelconques données à $\lambda_0, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$, le système

$$\lambda_0 = \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 0$$

étant seul exclu.

A l'aide d'un quaternion quelconque dont la norme n'est pas nulle,

$$(32) \qquad \mu_0 + i_{12}\mu_{12} + i_{13}\mu_{13} + i_{23}\mu_{23} = \mathrm{M},$$

formons la relation analogue à (22),

$$(33) \qquad \mathrm{MY} = \mathrm{ZM}_1,$$

à laquelle correspond une substitution linéaire, semblable à (1), nous permettant de passer des variables réelles y_1, y_2, y_3 aux variables réelles z_1, z_2, z_3. Si nous tenons compte de la loi d'associativité, les relations (22) et (33), multipliées membre à membre, nous donnent une nouvelle relation

$$(34) \qquad \mathrm{MAX} = \mathrm{ZM}_1\mathrm{A}_1.$$

Les deux substitutions linéaires, appliquées successivement, ont donc pour effet d'introduire le produit MA des quaternions correspondant à ces deux substitutions linéaires. On voit sans difficulté que le conjugué de MA est A′M′; la norme du produit MA est donc égale à MAA′M′, c'est-à-dire à $\mathrm{M}\,\mathfrak{N}(\mathrm{A})\,\mathrm{M}'$ ou à $\mathfrak{N}(\mathrm{M})\,\mathfrak{N}(\mathrm{A})$.

De l'équation

$$(35) \qquad \mathfrak{N}(\mathrm{MA}) = \mathfrak{N}(\mathrm{M})\,\mathfrak{N}(\mathrm{A}),$$

on déduit immédiatement que *la norme d'un produit de quaternions est égale au produit des normes de ces quaternions*. Comme $\mathfrak{N}(\mathrm{M})$ et $\mathfrak{N}(\mathrm{M})$ sont supposés différents de zéro, $\mathfrak{N}(\mathrm{MA})$ est nécessairement différent de zéro. Je ne voudrais pas manquer de faire observer ici que l'équation (35) est, au fond, identique au théorème de l'art. 93 du Mémoire d'Euler : *Demonstratio theorematis Fermatiani*, etc., que j'ai cité en commençant, et que si l'on se propose de parvenir, par multiplications, du théorème d'Euler à l'équation (35), on obtient les règles du calcul des quaternions. (*Comparez* Hamilton, Ouvrage cité, Préface, p. 47.)

D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, chaque quaternion A ap-

partient à un *ensemble* de quaternions, ayant tous, aux signes près, mêmes coefficients de 1, i_{12}, i_{13}, i_{23}, et, par suite, ayant tous même norme. Les quaternions qui appartiennent au même ensemble peuvent être répartis en groupes semblables à ceux que Gauss a introduits pour les quantités complexes $(a + bi)$ dans son célèbre Mémoire sur les restes biquadratiques. Celles des huit quantités $\pm (a \pm bi)$ ayant mêmes éléments réels a et b, que l'on obtient en multipliant successivement l'une d'entre elles par les quatre unités $1, -1, i, -i$, sont dites *associées*, tandis que celles qui ont même partie réelle et des coefficients de i égaux, mais de signes contraires, sont dites *conjuguées*. Si l'on remarque qu'à chaque quaternion Λ correspond une substitution (1) bien déterminée par la relation (22) et qu'au quaternion $-\Lambda$ correspond la même substitution (1), on est amené à répartir en groupes les quaternions d'un même ensemble d'après les changements que ces divers quaternions, substitués successivement dans l'équation (22), apportent à la substitution (1). Nous avons déjà observé qu'en changeant Λ en $I\Lambda$ on changeait les signes des coefficients des deux colonnes désignées par les indices du symbole i auquel est égal I; il y a 8 quaternions qui sont ainsi liés entre eux. Les quaternions d'un même ensemble, ayant même partie réelle λ_0, sont également au nombre de 8; on peut les mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23},\\
\Lambda' &= \lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} - i_{23}\lambda_{23},\\
\Lambda_1 &= \lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23} = i_{23}\Lambda\, i_{32},\\
\Lambda'_1 &= \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} - i_{23}\lambda_{23} = i_{23}\Lambda' i_{32},\\
\Lambda_2 &= \lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} - i_{23}\lambda_{23} = i_{13}\Lambda\, i_{31},\\
\Lambda'_2 &= \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23} = i_{13}\Lambda' i_{31},\\
\Lambda_3 &= \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} - i_{23}\lambda_{23} = i_{12}\Lambda\, i_{21},\\
\Lambda'_3 &= \lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23} = i_{12}\Lambda' i_{21}.
\end{aligned}$$

En passant de Λ à Λ_k $(k = 1, 2, 3)$, la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne des coefficients de la substitution (1) changent de signe. En passant de Λ à Λ' ou de Λ_k à Λ'_k $(k = 1, 2, 3)$, les lignes et les colonnes de

même rang sont transposées. L'ensemble des quaternions que l'on obtient en combinant ces deux genres d'opérations comprend 64 quaternions; il y a 32 substitutions linéaires correspondantes; on les obtient toutes, à l'aide de l'une d'entre elles, en faisant subir à ses lignes et colonnes les changements que nous venons d'indiquer, combinés de toutes les manières possibles.

IV.

Quaternions entiers et classes de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$.

Je considère maintenant spécialement les quaternions dont les quatre éléments réels $\lambda_0, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$ sont des nombres entiers : on nomme ces quaternions : *quaternions entiers*. La répartition en groupes, dont nous venons de parler, va ici nous être d'une grande utilité.

Pour que la norme d'un quaternion entier

$$(1) \qquad \Lambda = \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23}$$

soit égale à l'unité, il faut que l'un de ses quatre éléments réels soit égal à ± 1 et que les trois autres soient nuls. Il n'y a donc que 8 quaternions entiers dont la norme est égale à l'unité; ce sont les quaternions

$$(2) \qquad \pm 1, \quad \pm i_{12}, \quad \pm i_{13}, \quad \pm i_{23},$$

que l'on nomme *unités*. Si I désigne l'une quelconque de ces 8 unités, on a l'équation

$$\mathfrak{N}(I\Lambda) = \mathfrak{N}(\Lambda),$$

dont il a déjà été fait usage plus haut.

On peut d'abord démontrer que les 8 quaternions entiers $I\Lambda$ sont tous inégaux, pourvu que la norme $\mathfrak{N}(\Lambda)$ soit différente de zéro. Si l'on avait, en effet, l'égalité

$$I^a \Lambda = I\Lambda,$$

dans laquelle $I^{(a)}$ et I désignent deux unités différentes, on aurait aussi

$$(I^{(a)} - I)\Lambda = 0$$

et, par suite,

$$\mathfrak{N}(I^{(a)} - I)\mathfrak{N}\Lambda = 0;$$

donc, comme $\mathfrak{N}\Lambda$ n'est pas nulle, il viendrait

$$I^{(a)} - I = 0,$$

et l'unité $I^{(a)}$ ne serait pas différente de l'unité I.

Je nommerai quaternion entier *proprement dit* tout quaternion entier dont les quatre éléments λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} n'ont pas de diviseur commun, et quaternion entier *impropre* tout quaternion entier dont les quatre éléments λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} ont un diviseur commun. La norme d'un quaternion entier proprement dit ne peut être qu'un nombre entier impair ou le double ou le quadruple d'un nombre entier impair. Si, en effet, cette norme est paire, il faut que deux des entiers λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} soient impairs ou que ces quatre entiers soient tous impairs; or, dans le premier cas, la norme est un entier de la forme $4r + 2$ et, dans le second cas, la norme est un entier de la forme $8r + 4$.

Si un quaternion entier, dont la norme est un nombre premier, est le produit de deux quaternions entiers, l'un de ces derniers a nécessairement pour norme le nombre premier lui-même, tandis que l'autre a pour norme l'unité et est, par suite, égal à l'une des huit unités (2). On peut ainsi considérer chaque quaternion entier, dont la norme est un nombre premier, comme irréductible et dire qu'il est un *quaternion premier*.

Supposons que l'on nous donne un quaternion entier proprement dit Λ; soit m la norme de ce quaternion; désignons par p l'un quelconque des facteurs premiers impairs de m et soit p^γ la puissance à laquelle paraît p dans m. Comme le quaternion donné est un quaternion proprement dit, les quatre nombres entiers λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} ne sont pas tous les quatre divisibles par p; on peut donc, quel que soit le quaternion entier proprement dit donné Λ, toujours trouver un

quaternion IA dont la norme soit aussi égale à m et dont la partie réelle (le coefficient de l'unité réelle) ne soit pas divisible par p; mais alors rien n'empêche de supposer que, déjà dans le quaternion entier proprement dit donné, le nombre entier λ_0 ne soit pas divisible par p. Dans cette hypothèse on peut former le système de congruences

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_0\,\xi_1 + \lambda_{21}\xi_2 + \lambda_{31}\xi_3 \equiv 0, \\ \lambda_{12}\xi_1 + \lambda_0\,\xi_2 + \lambda_{32}\xi_3 \equiv 0, \\ \lambda_{13}\xi_1 + \lambda_{23}\xi_2 + \lambda_0\,\xi_3 \equiv 0, \end{array}\right\} \pmod{p^\gamma}$$

et montrer que ce système est vérifié par des nombres entiers ξ_1, ξ_2, ξ_3 non divisibles tous trois par p. A cet effet, formons le système des mineurs

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \lambda_0^2 + \lambda_{23}^2; & \lambda_{32}\lambda_{13} - \lambda_{12}\lambda_0; & \lambda_{12}\lambda_{23} - \lambda_{13}\lambda_0; \\ \lambda_{23}\lambda_{31} - \lambda_{21}\lambda_0; & \lambda_0^2 + \lambda_{31}^2; & \lambda_{13}\lambda_{21} - \lambda_{23}\lambda_0; \\ \lambda_{21}\lambda_{32} - \lambda_{31}\lambda_0; & \lambda_{31}\lambda_{12} - \lambda_{32}\lambda_0; & \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2. \end{array}\right.$$

Si les trois sommes de carrés qui paraissent dans l'une des diagonales de ce tableau (5) étaient divisibles par p, comme l'on a

$$(6)\qquad \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 = m,$$

les sommes de carrés

$$\lambda_{12}^2 + \lambda_{31}^2, \quad \lambda_{12}^2 + \lambda_{23}^2, \quad \lambda_{21}^2 + \lambda_{31}^2$$

seraient aussi divisibles par p; mais alors les nombres entiers

$$2\lambda_0^2, \quad 2\lambda_{12}^2, \quad 2\lambda_{13}^2, \quad 2\lambda_{23}^2$$

seraient eux-mêmes divisibles par p, et, par suite, p étant impair, les quatre entiers

$$\lambda_0, \quad \lambda_{12}, \quad \lambda_{13}, \quad \lambda_{23}$$

contiendraient p simultanément, ce qui n'est pas. Chaque ligne du tableau (5) nous fournit trois entiers ξ_1, ξ_2, ξ_3, vérifiant les con-

gruences (4); comme l'une au moins des trois sommes de carrés qui paraissent dans le tableau (5) n'est pas divisible par p, la ligne dans laquelle paraît cette somme de carrés nous fournira trois entiers ξ_1, ξ_2, ξ_3, qui ne seront pas tous trois multiples de p. Si, par exemple, $\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2$ n'est pas divisible par p, on peut prendre à volonté pour ξ_3 un entier quelconque non divisible par p et les deux nombres entiers ξ_1, ξ_2 sont ensuite déterminés sans ambiguïté, suivant le module p^γ, par les deux premières congruences (4). On obtient facilement, en désignant par ω_1, ω_2 les solutions, pour $\xi_3 = 1$, des deux premières congruences (4), les relations

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{21}\lambda_{32} - \lambda_{31}\lambda_0 \equiv \omega_1(\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2) \\ \lambda_{31}\lambda_{12} - \lambda_{32}\lambda_0 \equiv \omega_2(\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2) \end{array} \right\} \pmod{p^\gamma},$$

$$(8) \qquad \xi_1 \equiv \omega_1 \xi_3, \quad \xi_2 \equiv \omega_2 \xi_3 \qquad \pmod{p^\gamma}.$$

Dans le numéro précédent nous avons déduit des équations (9) une équation (10); en observant que λ_0 ne contient pas p en facteur, nous déduisons, ici de même, des congruences (4) une congruence

$$(9) \qquad \lambda_{23}\xi_1 + \lambda_{31}\xi_2 + \lambda_{12}\xi_3 \equiv 0 \qquad \pmod{p^\gamma}.$$

Si, outre le système (ξ_1, ξ_2, ξ_3) que nous venons d'obtenir, un second système $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)})$ dont les éléments $\xi_1^{(1)}$ $\xi_2^{(1)}$, $\xi_3^{(1)}$ ne sont pas tous trois divisibles par p, vérifie les congruences (4) et (9), on reconnaît facilement, d'après ce qui précède, qu'il existe un entier g, non divisible par p, qui vérifie les congruences

$$\xi_1^{(1)} \equiv g\xi_1; \quad \xi_2^{(1)} \equiv g\xi_2; \quad \xi_3^{(1)} \equiv g\xi_3 \qquad \pmod{p^\gamma}.$$

Deux semblables systèmes de nombres (ξ_1, ξ_2, ξ_3) et $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)})$ dont l'un peut se déduire de l'autre en le multipliant par un nombre non divisible par p, peuvent être appelés *équivalents* et réunis dans une même *classe*.

En ajoutant les congruences (4) respectivement multipliées par ξ_1, ξ_2, ξ_3 et remarquant que λ_0 n'est pas divisible par p, on en déduit cette nouvelle congruence

$$(10) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \qquad \pmod{p^\gamma}.$$

Ainsi *les congruences* (4) *et* (9) *admettent une classe déterminée de solutions, laquelle constitue en même temps une classe de solutions de la congruence* (10).

Avec les trois entiers ξ_1, ξ_2, ξ_3 formons l'expression

$$\xi_1 + i_{12}\xi_2 + i_{13}\xi_3 = \Xi. \tag{11}$$

Alors les premiers membres des équations (4) et (9), respectivement multipliés par $1, i_{12}, i_{13}, i_{23}$ et ajoutés ensemble, donneront pour résultat le produit $\Lambda\Xi$. Si donc nous convenons de considérer un quaternion entier comme congru à zéro suivant un module donné réel lorsque chacun de ses coefficients est divisible par ce module, les congruences (4) et (9) pourront être condensées dans la congruence unique

$$\Lambda\Xi \equiv 0 \qquad (\bmod\, p^\gamma). \tag{12}$$

Il est aisé de voir que, si l'on remplace Λ par $I\Lambda$, la congruence (12) est encore vérifiée, de sorte que les huit quaternions représentés par l'expression $I\Lambda$ appartiennent à la même classe de solutions (ξ_1, ξ_2, ξ_3) de la congruence (10).

Les quaternions $\Lambda i_{12}, \Lambda i_{13}, \Lambda i_{23}$ appartiennent à des classes de solutions de la congruence (1) faciles à déterminer. De la congruence (12) on déduit, en effet,

$$\left\{\begin{aligned} &\Lambda i_{12}(i_{21}\Xi i_{12}) \equiv 0 \qquad (\bmod\, p^\gamma),\\ &\Lambda i_{13}(i_{31}\Xi i_{13}) \equiv 0 \qquad (\bmod\, p^\gamma),\\ &\Lambda i_{23}(i_{32}\Xi i_{23}) \equiv 0 \qquad (\bmod\, p^\gamma),\end{aligned}\right. \tag{12'}$$

et, comme

$$\left\{\begin{aligned} i_{21}\Xi i_{12} &= \xi_1 + i_{12}\xi_2 - i_{13}\xi_3,\\ i_{31}\Xi i_{13} &= \xi_1 - i_{12}\xi_2 + i_{13}\xi_3,\\ i_{32}\Xi i_{23} &= \xi_1 - i_{12}\xi_2 - i_{13}\xi_3,\end{aligned}\right. \tag{12''}$$

les classes cherchées sont déterminées par les systèmes

$$\left\{\begin{aligned} &(\xi_1, \quad \xi_2, \ -\xi_3) \quad \text{pour} \quad \Lambda i_{12},\\ &(\xi_1, \ -\xi_2, \quad \xi_3) \quad \text{pour} \quad \Lambda i_{13},\\ &(\xi_1, \ -\xi_2, \ -\xi_3) \quad \text{pour} \quad \Lambda i_{23}.\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Ces trois systèmes et le système (ξ_1, ξ_2, ξ_3) appartiennent à quatre classes différentes lorsque aucun des trois nombres entiers ξ_1, ξ_2, ξ_3 n'est divisible par p; ils n'appartiennent qu'à deux classes différentes lorsqu'un de ces trois entiers est divisible par p.

Pour pouvoir étudier les quaternions proprement dits dont la norme est le double d'un nombre impair, il est nécessaire de considérer encore les congruences (4) et (9) par rapport au module 2. Nous avons déjà fait observer que, lorsque la norme d'un quaternion entier est le double d'un nombre impair, deux des entiers $\lambda_0, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$ sont nécessairement pairs et les deux autres impairs; il en résulte qu'en prenant pour I une unité convenable, on peut toujours s'arranger de manière que la partie réelle λ_0 de Λ soit un nombre impair. Mais alors deux des trois sommes de carrés contenues dans le Tableau (5) sont nécessairement des nombres impairs et la troisième est un nombre pair; supposons, pour fixer les idées, que $\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2$ soit un nombre impair; on peut alors choisir pour ξ_3 un entier quelconque impair et ξ_1, ξ_2 sont ensuite déterminés sans ambiguïté suivant le module 2. On voit donc que les congruences (4) ne peuvent être vérifiées, suivant le module 2, que par un seul système de nombres entiers qui ne soient pas pairs tous les trois; ce même système vérifie aussi la congruence (9), ainsi que la congruence (10), prises toutes deux suivant le module 2. Les classes de solutions de la congruence (10) auxquelles appartiennent les quaternions entiers $\Lambda i_{12}, \Lambda i_{13}, \Lambda i_{23}$ sont encore représentées par les systèmes (13); mais ces systèmes, pris suivant le module 2, sont manifestement équivalents.

Ainsi, les résultats obtenus sont démontrés pour tout quaternion entier proprement dit lorsque le module est égal à une puissance d'un nombre premier impair contenue dans la norme du quaternion entier, et, en outre, pour les quaternions entiers proprement dits dont la norme est le double d'un nombre entier impair, lorsque le module est égal à 2.

V.

Nombre de classes de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$.

Lorsqu'une congruence

$$(1) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$$

est vérifiée par un système d'entiers (ξ_1, ξ_2, ξ_3) qui ne soient pas tous trois divisibles par le nombre premier impair p, nous dirons que ce système est une *solution proprement dite* de la congruence (1).

Nous avons démontré que la congruence (1) avait au moins une solution proprement dite lorsque le module p^γ de cette congruence est un facteur de la norme m d'un quaternion entier proprement dit. Nous allons maintenant étudier cette congruence (1) sans y associer aucune supposition particulière et déterminer *le nombre de classes de ses solutions proprement dites.*

Soit d'abord $\gamma = 1$. Nous commencerons par considérer les solutions pour lesquelles ξ_3 n'est pas divisible par p. Pour $\xi_3 = 1$, nous pouvons écrire au lieu de (1), en tenant compte de la définition de ω_1 et ω_2 donnée dans le numéro précédent, la congruence

$$(2) \qquad \omega_1^2 + \omega_2^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

L'étude de cette congruence se ramène, comme je le montrerai tout à l'heure, à celle de la congruence

$$(3) \qquad 1 + a^2 \equiv b^2 \pmod{p}.$$

Cette dernière peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad 1 \equiv (b - a)(b + a) \pmod{p}.$$

En posant

$$(5) \qquad b - a = r, \qquad b + a = s,$$

on peut la remplacer par la congruence

$$(6) \qquad 1 \equiv rs \pmod{p},$$

à laquelle il faut joindre, puisque a et b sont des nombres entiers, la congruence

$$(6') \qquad r \equiv s \pmod{2}.$$

La congruence (6) montre que le nombre entier r ne peut être divisible par p; prenons pour r successivement les $(p-1)$ restes incongrus suivant le module p, en excluant le reste 0; pour chacune de ces $(p-1)$ valeurs de r déterminons la valeur correspondante de s, d'après la congruence (6), à un multiple de p près, et fixons ce multiple de manière à vérifier la congruence (6'); nous obtiendrons ainsi $(p-1)$ paires de nombres entiers (r, s) qui représenteront toutes les solutions des congruences (6) et (6'); nous en tirerons $(p-1)$ paires de nombres entiers (a, b) à l'aide des relations

$$(7) \qquad b = \frac{r+s}{2}, \qquad a = \frac{r-s}{2},$$

et ces $(p-1)$ paires de nombres entiers (a, b) représenteront toutes les solutions de la congruence (3). Ainsi la congruence (3) est toujours possible et a toujours $(p-1)$ solutions.

Pour passer de la congruence (3) à la congruence (2), nous allons distinguer le cas où l'on a $p \equiv 1 \pmod{4}$, du cas où l'on a $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Si l'on a $p \equiv 1 \pmod{4}$, (-1) est résidu quadratique de p: il existe donc un nombre entier δ vérifiant la congruence

$$(8) \qquad \delta^2 \equiv -1 \pmod{p};$$

mais alors, pour chaque solution (ω_1, ω_2) de la congruence (2), la congruence

$$(9) \qquad 1 + \omega_1^2 - \delta^2 \omega_2^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

a lieu; cette dernière congruence montre que les nombres entiers

$$(10) \qquad a \equiv \omega_1, \qquad b \equiv \delta\omega_2 \qquad (\text{mod } p)$$

vérifient la congruence (3). Inversement, à chaque solution (a, b) de la congruence (3) correspond une paire d'entiers (ω_1, ω_2), déterminés par les congruences (10), qui vérifient la congruence (2). Donc la congruence (2) a $(p-1)$ solutions.

Si l'on a $p \equiv 3 (\text{mod } 4)$, le nombre (-1) est non-résidu quadratique de p; il est donc impossible que parmi les solutions de la congruence (3) il y ait des systèmes (a, b) pour lesquels le nombre entier b soit divisible par p; il y a par contre deux solutions de la congruence (3), $(a \equiv 0, b \equiv \pm 1)$, pour lesquelles a est divisible par p; en mettant ces deux solutions à part, il reste $(p-3)$ solutions (a, b) de la congruence (3) pour lesquelles aucun des deux nombres entiers a et b n'est divisible par p. Ces $(p-3)$ solutions se partagent en $\frac{p-3}{4}$ groupes contenant chacun quatre solutions correspondantes $(\pm a, \pm b)$; chacun de ces groupes représente un des cas où l'un des $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques de p, augmenté d'une unité, est de nouveau égal à un résidu quadratique de p; et, par ces $\frac{p-3}{4}$ groupes, il est tenu compte de tous les cas dont nous parlons. Il y a donc exactement $\frac{p-3}{4}$ résidus quadratiques de p qui, augmentés d'une unité, sont de nouveau résidus quadratiques de p. Si l'on augmente d'une unité l'un des $\frac{p+1}{4}$ autres résidus quadratiques de p, on obtient un nombre entier qui n'est ni divisible par p, ni résidu quadratique de p et est donc nécessairement non-résidu quadratique de p. Comme chaque résidu quadratique de p est congru, suivant le module p, au carré d'un entier c, et, dans le cas qui nous occupe, chaque non-résidu quadratique au carré d'un entier d pris avec le signe moins; comme, de plus, les entiers c et d peuvent être remplacés par $(-c)$ et $(-d)$, on voit que chacun des $\frac{p+1}{4}$ résidus quadratiques dont nous avons parlé en dernier lieu donne quatre solu-

tions de la congruence

$$(11) \qquad 1 + c^2 \equiv -d^2 \pmod{p},$$

qui est identique à la congruence (2). Donc la congruence (2) a $(p+1)$ solutions.

Les deux cas que nous avons distingués nous amènent ainsi à des résultats différents. Suivant que l'on a $p \equiv 1$ ou $p \equiv 3 \pmod 4$, la congruence (2) a $(p-1)$ ou $(p+1)$ solutions. Cette différence apparaît également dans la marche suivie par M. Hermite (*comparez* le Mémoire cité dans l'introduction). Mais nous allons montrer que cette différence s'évanouit lorsqu'on détermine le nombre de classes de solutions proprement dites de la congruence proposée.

Dans le cas où l'on a $p \equiv 1 \pmod 4$, la congruence

$$(12) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

peut être vérifiée en prenant pour ξ_3 un entier divisible par p; mais alors ni ξ_1 ni ξ_2 ne peuvent être divisibles par p, sans quoi nous n'aurions plus de solution proprement dite. Pour $\xi_3 \equiv 0 \pmod p$ la congruence (12) se réduit à

$$(12') \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 \equiv 0 \pmod{p};$$

comme ξ_1 et ξ_2 ne sont pas divisibles par p, cette congruence a deux classes de solutions proprement dites (*comparez* § II). Ces deux classes, jointes aux $(p-1)$ classes pour lesquelles ξ_3 n'est pas divisible par p, donnent $(p+1)$ classes de solutions proprement dites de la congruence (12).

Dans le cas où l'on a $p \equiv 3 \pmod 4$, il est, au contraire, impossible que ξ_3 soit divisible par p; en effet, la congruence (12′) ne peut être résolue, dans ce cas, que si l'on a à la fois $\xi_1 \equiv 0$, $\xi_2 \equiv 0 \pmod p$; l'hypothèse $\xi_3 \equiv 0 \pmod p$ ne nous donne donc aucune solution proprement dite de la congruence (12). Aucune classe de solutions ne s'ajoute ainsi aux $(p+1)$ classes pour lesquelles ξ_3 n'est pas divisible par p.

Enfin, si l'on forme une congruence semblable à la congruence (12), mais prise suivant le module 2,

$$(13) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod 2,$$

on voit immédiatement que cette congruence n'a que trois solutions proprement dites; ce sont les solutions

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \xi_1 \equiv 0, & \xi_2 \equiv 1, & \xi_3 \equiv 1 \\ \xi_1 \equiv 1, & \xi_2 \equiv 0, & \xi_3 \equiv 1 \\ \xi_1 \equiv 1, & \xi_2 \equiv 1, & \xi_3 \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod 2.$$

On a donc démontré dans toute sa généralité le théorème :

Le nombre de solutions proprement dites de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0$, *prise suivant un module premier quelconque* p, *est toujours égal à* $(p+1)$.

L'absence d'exception à ce théorème est, si je ne m'abuse, un caractère spécifique de la congruence (12). Comme chaque classe de solutions proprement dites comprend $(p-1)$ solutions incongrues suivant le module p, le nombre de toutes les solutions incongrues proprement dites est égal à (p^2-1); en y ajoutant l'unique solution impropre $(\xi_1 \equiv 0, \xi_2 \equiv 0, \xi_3 \equiv 0) \pmod p$, on voit que *le nombre total des solutions de la congruence* (12) *est égal au carré* p^2 *du module premier* p *de cette congruence.*

Connaissant le nombre de classes de solutions proprement dites de la congruence (12), nous allons chercher à déterminer par induction le nombre de classes de solutions proprement dites de la congruence (1), où le module est p^γ; $(\gamma > 1)$.

Supposons, à cet effet, que nous connaissions un système de solutions proprement dites (ξ_1, ξ_2, ξ_3) de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^{\gamma-1}};$$

nous pouvons alors déterminer trois nombres entiers t_1, t_2, t_3 de ma-

nière que la somme des carrés des trois expressions

$$\xi_1 + t_1 p^{\gamma-1}, \quad \xi_2 + t_2 p^{\gamma-1}, \quad \xi_3 + t_3 p^{\gamma-1}$$

soit divisible par p^γ. En effet, comme $\gamma \geqq 2$, on a $2(\gamma - 1) \geqq \gamma$; les termes contenant $p^{2(\gamma-1)}$ sont donc nécessairement divisibles par p^γ; en tenant compte de cette observation, on voit que la somme des carrés des trois expressions précédentes est ou n'est pas divisible par p^γ, suivant que l'expression

$$(15) \qquad \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}{p^{\gamma-1}} + 2(\xi_1 t_1 + \xi_2 t_2 + \xi_3 t_3)$$

est ou n'est pas divisible par p. Mais nous avons déjà observé que, dans un système de solutions proprement dites, un seul des trois entiers ξ_1, ξ_2, ξ_3 pouvait être divisible par p; supposons, pour fixer les idées, que ξ_1 et ξ_2 ne le soient pas. On peut assigner à t_2 une valeur fixe arbitraire et donner successivement à t_3 toute la série des valeurs incongrues suivant le module p. Les valeurs correspondantes de $t_1 \pmod p$ seront déterminées sans ambiguïté par la condition que l'expression (15) soit divisible par p. [On pourrait, au contraire, déterminer t_1 de telle sorte que (15) ne fût pas divisible par p, auquel cas la somme de trois carrés ne serait pas divisible par p^γ. Cette remarque nous servira plus tard.]

Les p solutions proprement dites (pour le module p^γ) déduites de la solution (ξ_1, ξ_2, ξ_3) pour une même valeur de t_2 et des valeurs différentes de t_3 appartiennent évidemment à des classes différentes. On voit donc que le nombre de classes de solutions proprement dites de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^\gamma)$$

est exactement p fois plus grand que le nombre de classes de solutions proprement dites de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{\gamma-1}).$$

Il est donc égal à $p^{\gamma-1}(p+1)$.

Il se présente une exception pour le passage du nombre premier 2 à

son carré 4. Pour que la congruence

$$(16) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod 4$$

ait un système de solutions proprement dites (ξ_1, ξ_2, ξ_3), il faut que l'un des trois nombres entiers ξ_1, ξ_2, ξ_3 soit pair et que les deux autres soient impairs; mais alors la somme des carrés de ces trois nombres est de la forme $4r + 2$ et ne peut donc pas être divisible par 4. *La congruence* (16) *n'a donc aucun système de solutions proprement dites.*

VI.

Problème. — *Trouver tous les quaternions entiers dont la norme soit égale à un nombre entier donné.*

Ce qui précède nous permet d'aborder le problème fondamental de la théorie des quaternions entiers. Un nombre entier m, impair ou double ou quadruple d'un nombre impair, étant donné, trouver tous les quaternions entiers proprement dits dont la norme soit égale au nombre m et représenter, de toutes les manières possibles, chacun de ces quaternions comme produit de quaternions premiers.

Considérons d'abord le cas particulier où le nombre entier donné est un nombre premier impair p. Soit alors (ξ_1, ξ_2, ξ_3) un système représentant une classe déterminée de solutions de la congruence

$$(1) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod p.$$

Je vais démontrer qu'il existe un quaternion entier proprement dit dont la norme est égale à p et qui appartient à la classe déterminée par le système (ξ_1, ξ_2, ξ_3). A cet effet, déterminons les quatre entiers $\tau\rho_0$, $\tau\rho_{12}$, $\tau\rho_{13}$, $\tau\rho_{23}$ numériquement plus petits que $\frac{p}{2}$ qui vérifient les congruences

$$(2) \qquad \tau\rho_0 \equiv \xi_1, \qquad \tau\rho_{12} \equiv \xi_2, \qquad \tau\rho_{13} \equiv \xi_3, \qquad \tau\rho_{23} \equiv 0 \pmod p;$$

soit τ le plus grand commun diviseur de ces quatre entiers; τ ne peut

être divisible par p. Posons ensuite

$$(3) \qquad \rho_0 + i_{12}\rho_{12} + i_{13}\rho_{13} + i_{23}\rho_{23} = \mathrm{P},$$

$$(4) \qquad \xi_1 + i_{12}\xi_2 + i_{13}\xi_3 = \Xi;$$

comme τ et p sont premiers entre eux, le système des congruences (4) et (9) du § IV, qui est condensé dans la congruence (12) du même paragraphe, est vérifié pour les valeurs

$$\rho_0 = \lambda_0, \qquad \rho_{12} = \lambda_{12}, \qquad \rho_{13} = \lambda_{13}, \qquad \rho_{23} = \lambda_{23},$$

Nous avons donc ici la congruence

$$(5) \qquad \mathrm{P}\Xi \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

La norme du quaternion P est égale à la somme de quatre carrés, chacun plus petit que $\frac{p^2}{4}$; elle est donc plus petite que p^2; comme elle est divisible par p, nous pouvons d'ailleurs écrire

$$(6) \qquad \mathfrak{N}(\mathrm{P}) = pt,$$

et t est alors nécessairement plus petit que p. Si t est égal à l'unité, le problème est résolu par le quaternion P lui-même. Si t est différent de l'unité, nous déterminerons quatre nombres entiers φ_0, φ_{12}, φ_{13}, φ_{23}, numériquement inférieurs ou au plus égaux à $\frac{t}{2}$ et vérifiant les congruences

$$(7) \quad \varphi_0 \equiv \rho_0, \qquad \varphi_{12} \equiv \rho_{12}, \qquad \rho_{13} \equiv \rho_{13}, \qquad \varphi_{23} \equiv \rho_{23} \qquad (\mathrm{mod}\ t).$$

Il est facile de s'assurer que les quatre nombres entiers φ_0, φ_{12}, φ_{13}, φ_{23}, ainsi obtenus, ne peuvent être tous les quatre numériquement égaux à $\frac{t}{2}$; lorsque t est différent de 2, cela résulte simplement de ce que les quatre entiers ρ_0, ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23}, auxquels φ_0, φ_{12}, φ_{13}, φ_{23} sont congrus, n'ont, par définition, aucun diviseur commun; lorsque t est

égal à 2, on aurait

$$\rho_0 \equiv 1, \qquad \rho_{12} \equiv 1, \qquad \rho_{13} \equiv 1, \qquad \rho_{23} \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2),$$

et, par suite,

$$\mathfrak{N}(P) \equiv 4 \ (\text{mod } 8),$$

contrairement à l'égalité (6) qui, pour $t = 2$, est $\mathfrak{N}(P) = 2p$. La norme $\mathfrak{N}(\Phi)$ du quaternion

$$(8) \qquad \Phi = \rho_0 + i_{12}\rho_{12} + i_{13}\rho_{13} + i_{23}\rho_{23}$$

est donc plus petite que t^2, et, comme elle est divisible par t, on a, en posant

$$(9) \qquad \mathfrak{N}(\Phi) = tt^{(1)},$$

l'inégalité $t^{(1)} < t$.

Si l'on multiplie le quaternion Φ', conjugué de Φ, par le quaternion P, on obtient un nouveau quaternion dont les quatre éléments réels sont divisibles par t, comme il est facile de s'en assurer. Outre t, ces quatre éléments réels peuvent encore avoir un autre facteur commun; soit $\tau^{(1)}t$ leur plus grand commun diviseur; posons alors

$$(10) \qquad \Phi' P = \tau^{(1)} t(\rho_0^{(1)} + i_{12}\rho_{12}^{(1)} + i_{13}\rho_{13}^{(1)} + i_{23}\rho_{23}^{(1)}),$$

$$(11) \qquad P^{(1)} = \rho_0^{(1)} + i_{12}\rho_{12}^{(1)} + i_{13}\rho_{13}^{(1)} + i_{23}\rho_{23}^{(1)};$$

$P^{(1)}$ sera un quaternion entier proprement dit. On a, d'après (6) et (9),

$$\mathfrak{N}(\Phi' P) = pt^2 t^{(1)};$$

comme t et $t^{(1)}$ sont plus petits que p, cette norme ne peut être divisible par p^2; or, d'après (10) et (11), on a aussi

$$\mathfrak{N}(\Phi' P) = (\tau^{(1)})^2 t^2 \mathfrak{N}(P^{(1)});$$

donc $\tau^{(1)}$ ne peut être divisible par p.

On peut déduire facilement de la congruence (5), la congruence

$$(12) \qquad \Phi' P \Xi \equiv 0 \pmod{p},$$

en n'effectuant que des additions et des multiplications par des nombres entiers réels, opérations qui sont identiques dans le calcul des quaternions et dans le calcul ordinaire. Les relations (10) et (11) donnent

$$\Phi' P = \tau^{(1)} t P^{(1)};$$

la congruence (12) peut donc s'écrire

$$\tau^{(1)} t P^{(1)} \Xi \equiv 0 \pmod{p}$$

ou encore, comme les nombres entiers $\tau^{(1)}$ et t ne sont pas divisibles par p,

$$(13) \qquad P^{(1)} \Xi \equiv 0 \pmod{p}.$$

De l'égalité

$$\mathfrak{N}(\Phi' P) = t^2 t^{(1)} p = t^2 (\tau^{(1)})^2 \mathfrak{N}(P^{(1)})$$

on déduit d'ailleurs, comme $\tau^{(1)}$ et p sont premiers entre eux, que $t^{(1)}$ est divisible par $(\tau^{(1)})^2$, et l'on a

$$(14) \qquad \mathfrak{N}(P^{(1)}) = p \frac{t^{(1)}}{(\tau^{(1)})^2}.$$

Au lieu des relations (5) et (6), nous avons donc deux relations (13) et (14) dans lesquelles le quaternion entier proprement dit $P^{(1)}$ et le nombre entier $\frac{t^{(1)}}{(\tau^{(1)})^2}$ remplacent le quaternion proprement dit P et le nombre entier t; on a d'ailleurs manifestement l'inégalité $\frac{t^{(1)}}{(\tau^{(1)})^2} < t$.

Rien n'empêche de répéter le même raisonnement et de former successivement des quaternions $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ..., vérifiant les relations (5) et (6), comme P et $P^{(1)}$, et ayant dans l'équation (6) un coefficient entier de p de plus en plus petit, jusqu'à ce que ce coefficient entier soit égal à l'unité. Nous arrivons ainsi à former un quaternion entier

proprement dit,

$$P^{(s)} = \rho_0^{(s)} + i_{12}\rho_{12}^{(s)} + i_{13}\rho_{13}^{(s)} + i_{23}\rho_{23}^{(s)}$$

vérifiant les relations

$$(15) \qquad P^{(s)}\Xi \equiv 0 \pmod{p},$$

$$(16) \qquad \mathfrak{N}(P^{(s)}) = p.$$

Le problème posé est donc résolu pour tout nombre premier impair p. Le quaternion $P^{(s)}$ est un *quaternion premier* qui appartient à la classe donnée de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Les huit quaternions premiers $\Pi^{(s)}$ appartiennent à la même classe de solutions; nous choisirons arbitrairement l'un de ces huit quaternions et nous nous en servirons dans les calculs suivants. Nous aurons alors, par le procédé indiqué, $p+1$ quaternions premiers dont la norme est p, appartenant chacun à l'une des $p+1$ classes de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p}$.

A chaque quaternion premier P, dont la norme est un nombre premier impair, correspond un quaternion conjugué P′ qui a même norme que P et est donc aussi un quaternion premier. Nous allons démontrer que les deux quaternions conjugués P et P′ ne peuvent appartenir à la même classe de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Pour cela, formons, en suivant la méthode indiquée dans le § IV et remplaçant la lettre λ par la lettre ρ, deux systèmes (ξ_1, ξ_2, ξ_3) et $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)})$ auxquels correspondent respectivement les quaternions P et P′. Nous pouvons supposer que ρ_0 et $\rho_0^2 + \rho_{12}^2$, par exemple, ne soient pas divisibles par p et choisir alors pour ξ_3, comme pour $\xi_3^{(1)}$, un entier quelconque non divisible par p; nous prendrons

$$\xi_3 = \xi_3^{(1)} = \rho_0^2 + \rho_{12}^2;$$

nous aurons alors

$$\xi_1 = \rho_{21}\rho_{32} - \rho_{31}\rho_0, \qquad \xi_2 = \rho_{31}\rho_{12} - \rho_{32}\rho_0,$$

$$\xi_1^{(1)} = \rho_{12}\rho_{23} - \rho_{13}\rho_0, \qquad \xi_2^{(1)} = \rho_{13}\rho_{21} - \rho_{23}\rho_0.$$

Si les deux systèmes (ξ_1, ξ_2, ξ_3) et $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)})$ étaient équivalents,

il faudrait, comme ξ_3 et $\xi_3^{(1)}$ sont égaux et ne sont pas divisibles par p, que l'on eût

$$\xi_1^{(1)} - \xi_1 \equiv 2\rho_{31}\rho_0 \equiv 0, \qquad \xi_2^{(1)} - \xi_2 \equiv 2\rho_{32}\rho_0 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p);$$

il viendrait donc

$$\rho_{31} \equiv 0, \qquad \rho_{32} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p)$$

et, par suite, comme $\rho_0^2 + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 = p$,

$$\rho_0^2 + \rho_{12}^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p),$$

contrairement à l'hypothèse. Les deux quaternions premiers conjugués P et P′ appartiennent donc nécessairement à des classes différentes.

Si le nombre premier donné est le nombre 2, on a à vérifier l'équation

$$(17) \qquad \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 = 2.$$

Pour cela, il faut et il suffit que deux des quatre carrés qui paraissent dans cette équation soient égaux à l'unité, et que les deux autres soient nuls. Les vingt-quatre quaternions premiers, dont les éléments vérifient cette condition, se répartissent entre les trois classes (14) de solutions proprement dites de la congruence (13) du § V. I représentant l'une quelconque des huit unités, les quaternions

$$(18) \quad \left\{\begin{array}{lll} \mathrm{I}(1+i_{23}) \text{ appartiennent à la classe} & \xi_1 \equiv 0, \quad \xi_2 \equiv 1, & \xi_3 \equiv 1 \\ \mathrm{I}(1+i_{31}) \qquad\qquad \text{»} & \xi_1 \equiv 1, \quad \xi_2 \equiv 0, & \xi_3 \equiv 1 \\ \mathrm{I}(1+i_{12}) \qquad\qquad \text{»} & \xi_1 \equiv 1, \quad \xi_2 \equiv 1, & \xi_3 \equiv 0 \end{array}\right\} (\text{mod } 2).$$

Deux quaternions conjugués appartiennent ici à la même classe, comme on s'en assure facilement.

Afin de pouvoir passer du cas où le nombre donné est premier au cas où il est composé, il nous faut établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un produit de deux quaternions proprement

dits M et A soit divisible par une puissance déterminée p^γ d'un nombre premier impair p.

De la congruence

$$(19) \qquad MA \equiv 0 \pmod{p^\gamma},$$

on déduit les congruences

$$(20) \qquad \begin{cases} M'MA = \mathfrak{N}(M)A \equiv 0 \pmod{p^\gamma}, \\ MAA' = M\mathfrak{N}(A) \equiv 0 \pmod{p^\gamma} \end{cases}$$

ou, comme A et M sont des quaternions proprement dits,

$$\mathfrak{N}(M) \equiv 0, \qquad \mathfrak{N}(A) \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

Soient $p^{\gamma+l}$ la plus haute puissance de p qui divise le nombre entier $\mathfrak{N}(A)$, et $p^{\gamma+m}$ la plus haute puissance de p qui divise le nombre entier $\mathfrak{N}(M)$. Le quaternion A′ appartient alors à une classe de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^{\gamma+l}}$; soit $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)})$ un système représentant cette classe. Le quaternion M appartient à une classe de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^{\gamma+m}}$; soit (η_1, η_2, η_3) un système représentant cette classe. Si nous posons

$$(21) \qquad \xi_1^{(1)} + i_{12}\xi_2^{(1)} + i_{13}\xi_3^{(1)} = \Xi^{(1)},$$

$$(22) \qquad \eta_1 + i_{12}\eta_2 + i_{13}\eta_3 = \Pi,$$

nous aurons alors

$$(23) \qquad A'\Xi^{(1)} \equiv 0 \pmod{p^{\gamma+l}},$$

$$(24) \qquad M\Pi \equiv 0 \pmod{p^{\gamma+m}}.$$

Comme, d'après (19), on a

$$MA \equiv 0 \pmod{p^\gamma},$$

il vient aussi, en prenant, au lieu du quaternion MA, son conju-

gué $\Lambda'M'$,

$$(25) \qquad \Lambda'M' \equiv 0 \pmod{p^{\gamma}}.$$

On en déduit, en tenant compte de la congruence (24),

$$\Lambda'M'MH \equiv 0 \pmod{p^{2\gamma+m}};$$

mais, par hypothèse, $p^{\gamma+m}$ est la plus haute puissance de p contenue dans la norme $M'M$; on a donc, en supprimant ce facteur, une nouvelle congruence

$$(26) \qquad \Lambda'H \equiv 0 \pmod{p^{\gamma}},$$

qui montre que le quaternion Λ' appartient à la classe représentée par (η_1, η_2, η_3).

Pour que le produit de deux quaternions proprement dits M et Λ soit divisible par p^{γ}, il faut donc que les normes de chacun de ces quaternions soient divisibles par p^{γ}, et que les deux quaternions M et Λ' appartiennent à une même classe de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^{\gamma}}.$$

Ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes, car de la congruence (26) on déduit la congruence

$$(27) \qquad H'\Lambda \equiv 0 \pmod{p^{\gamma}},$$

qui, combinée à la congruence (24), donne une nouvelle congruence

$$(28) \qquad MHH'\Lambda \equiv 0 \pmod{p^{2\gamma+m}};$$

mais il résulte immédiatement d'une observation faite dans le § V, à propos du choix des entiers t_1, t_2, t_3 pour lesquels la congruence (15) n'est pas vérifiée, que l'on peut toujours choisir η_1, η_2, η_3 de manière que la norme HH' ne soit pas divisible par une puissance de p supérieure à $p^{\gamma+m}$; en divisant par $\mathfrak{N}(H)$, la congruence (28) devient

donc

$$MA \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^\gamma),$$

qui n'est autre que la congruence (19).

Un raisonnement semblable nous amène à reconnaître qu'un produit de deux quaternions proprement dits, M et A, ne peut être divisible par le nombre 2 que si la norme de chacun des deux facteurs est paire. En nous bornant, ce qui suffit pour l'objet que nous avons en vue, au cas où les deux normes $\mathfrak{N}(M)$ et $\mathfrak{N}(A)$ sont chacune le double d'un nombre impair, on verrait qu'il faut, en outre, que les deux quaternions M et A appartiennent à la même classe de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod 2$. Ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

Ceci posé, passons au cas où le nombre entier donné est égal au carré p^2 d'un nombre impair p. Nous avons vu, dans le § V, que les quaternions proprement dits dont la norme est égale à p^2 peuvent appartenir à $p(p+1)$ classes de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^2).$$

Nous allons montrer que, pour tout nombre premier p, à chacune de ces $p(p+1)$ classes appartiennent effectivement des quaternions proprement dits dont la norme est égale à p^2.

A une classe quelconque de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p)$$

appartient un quaternion P. Le quaternion P' appartient à une autre classe qui diffère nécessairement de la première, comme nous l'avons remarqué. Considérons les p quaternions dont la norme est égale à p et qui appartiennent aux p classes de solutions qui restent après la suppression de celle à laquelle appartient P'. Soit Θ l'un quelconque de ces p quaternions; le produit

$$\Theta P \tag{29}$$

est alors, d'après le lemme démontré, un quaternion proprement dit.

Si l'on remplace P successivement par $p+1$ quaternions $P^{(a)}$ appartenant aux $p+1$ classes possibles et si, pour chaque quaternion $P^{(a)}$, on remplace successivement Θ par les p quaternions $\Theta^{(b)}$ qu'il représente, on obtient $p(p+1)$ quaternions proprement dits $\Theta^{(b)}P^{(a)}$. Supposons que deux de ces quaternions, $\Theta^{(b)}P^{(a)}$ et ΘP par exemple, appartiennent à la même classe de solutions $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^2};$$

on aurait alors, en posant

$$Z = \zeta_1 + i_{12}\zeta_2 + i_{13}\zeta_3, \tag{30}$$

deux congruences

$$\Theta P Z \equiv 0 \pmod{p^2}, \qquad \Theta^{(b)}P^{(a)}Z \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{31}$$

De la première, on déduit la relation

$$Z'P'\Theta' \equiv 0 \pmod{p^2};$$

mais la seconde, multipliée par cette relation, donne

$$\Theta^{(b)}P^{(a)}ZZ'P'\Theta' \equiv 0 \pmod{p^4},$$

et, comme on peut choisir les ζ de telle sorte que la norme ZZ', qui est divisible par p^2, ne soit pas divisible par une puissance supérieure de p, il vient, en divisant par $\mathfrak{N}(Z)$,

$$\Theta^{(b)}P^{(a)}P'\Theta' \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{32}$$

En multipliant cette congruence par Θ, on aurait donc, comme $\Theta'\Theta = p$, la congruence

$$\Theta^{(b)}P^{(a)}P' \equiv 0 \pmod{p}.$$

Mais alors, d'après le lemme, les deux quaternions $\Theta^{(b)}P^{(a)}$ et P appartiennent nécessairement à la même classe de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

On déduit de même des équations (31) que les deux quaternions ΘP et $P'^{(a)}$ appartiennent à la même classe de solutions de la congruence précédente. Mais, par hypothèse, les deux quaternions ΘP et $\Theta'^{(b)} P'^{(a)}$ appartiennent à la même classe de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^2};$$

à plus forte raison appartiennent-ils à la même classe de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Donc les deux quaternions P et $P'^{(a)}$ appartiennent à la même classe de solutions de la dernière congruence, ce qui revient à dire que P et $P'^{(a)}$ sont identiques. L'égalité $P'^{(a)} P' = PP' = p$ montre ensuite que la congruence (32) se réduit à

$$\Theta'^{(b)}\Theta' \equiv 0 \pmod{p};$$

il en résulte que les deux quaternions $\Theta'^{(b)}$ et Θ appartiennent à la même classe de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p}$, et sont, par suite, identiques. Nous arrivons ainsi à conclure que les deux quaternions $\Theta'^{(b)} P'^{(a)}$ et ΘP sont identiques. Il est donc impossible que deux des $p(p+1)$ quaternions proprement dits $\Theta'^{(b)} P'^{(a)}$ appartiennent à la même classe de solutions prises suivant le module p^2.

Le même procédé qui vient de nous permettre de passer du cas où le nombre entier donné est égal à p au cas où il est égal à p^2, nous permet de passer du cas où il est égal à p^2 au cas où il est égal à p^3, et ainsi de suite jusqu'à une puissance quelconque p^γ de p. Nous multiplierons chaque fois, de droite à gauche, les expressions analogues à (29) par un nouveau quaternion, à norme égale à p, appartenant successivement à p des $p+1$ classes de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p};$$

la classe à exclure est chaque fois celle à laquelle appartient le conjugué du facteur voisin de droite, comme c'était le cas dans les expressions (29). Nous obtiendrons ainsi, pour chacune des $p^{\gamma-1}(p+1)$ classes possibles de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$, un quaternion appartenant à cette classe.

En considérant le produit de deux quelconques des quaternions

premiers dont la norme est égale à 2, quaternions que nous avons formés plus haut (18), on reconnaîtra qu'il est égal à un quaternion proprement dit ou à un quaternion impropre suivant que les deux quaternions premiers appartiennent à des classes de solutions différentes ou à la même classe. Ce fait est d'accord avec celui que nous avons déjà mentionné, que les quaternions conjugués appartiennent ici à la même classe de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

Les quaternions proprement dits, dont la norme est égale à 4, sont, comme chaque unité peut être prise positive ou négative, au nombre de 16, et se répartissent, d'après les notations précédemment employées, en deux groupes

$$(34) \qquad \mathrm{I}(1 + i_{23} + i_{31} + i_{12}), \quad \mathrm{I}(1 + i_{32} + i_{13} + i_{21}),$$

I désignant, comme précédemment, une unité quelconque. On peut obtenir les quantités entre parenthèses, paraissant dans ces quaternions (34), à l'aide des quaternions dont la norme est égale à 2, de plusieurs manières, comme le montrent les relations suivantes :

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} (1 + i_{23})(1 + i_{31}) &= (1 + i_{31})(1 + i_{12}) \\ &= (1 + i_{12})(1 + i_{23}) = 1 + i_{23} + i_{31} + i_{12}, \\ (1 + i_{13})(1 + i_{32}) &= (1 + i_{21})(1 + i_{13}) \\ &= (1 + i_{32})(1 + i_{21}) = 1 + i_{32} + i_{13} + i_{21}. \end{aligned} \right.$$

Je passe enfin au cas où le nombre entier donné m est un nombre composé. Pour représenter tous les quaternions entiers proprement dits dont la norme est m, nous commencerons par décomposer m en ses facteurs premiers; soient $m = \sigma p^\gamma q^\delta, \ldots, p, q, \ldots$ étant les facteurs premiers impairs contenus dans m; d'après le § IV, σ est alors nécessairement l'un des nombres 1, 2, 4. Nous formerons ensuite pour chacune des $p^{\gamma-1}(p+1)$ classes de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^\gamma),$$

un quaternion $\Lambda^{(a)}$ appartenant à cette classe; pour chacune des $q^{\delta-1}(q+1)$ classes de solutions de la congruence

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } q^\delta),$$

un quaternion $M^{(b)}$ appartenant à cette classe, etc., et nous multiplierons de droite à gauche ces quaternions $\Lambda^{(a)}$, $M^{(b)}$, ...; le produit

$$(36) \qquad \Omega^{a,b,\ldots} = \ldots M^{(b)}\Lambda^{(a)}$$

représentera alors $p^{\gamma-1}(p+1)q^{\delta-1}(q+1)\ldots$ quaternions. Nous multiplierons enfin chaque quaternion $\Omega^{a,b,\ldots}$, à gauche, successivement par chacune des huit unités I, quand $\sigma=1$; par chacun des vingt-quatre quaternions proprement dits (18) dont la norme est égale à 2, quand $\sigma=2$; par chacun des seize quaternions proprement dits (34) dont la norme est égale à 4, quand $\sigma=4$. Nous obtiendrons ainsi, pour $\sigma=1, 2, 4$, un nombre de quaternions dont la norme est égale à m, respectivement égal à

$$(37) \qquad \begin{cases} 8\,p^{\gamma-1}(p+1)q^{\delta-1}(q+1)\ldots, \\ 8.3\,p^{\gamma-1}(p+1)q^{\delta-1}(q+1)\ldots, \\ 8.2\,p^{\gamma-1}(p+1)q^{\delta-1}(q+1)\ldots. \end{cases}$$

Je vais démontrer que ces quaternions représentent *tous les quaternions proprement dits, dont la norme est égale à m, chacun pris une seule fois.*

En effet, ces quaternions sont d'abord des quaternions proprement dits; car les normes des quaternions proprement dits $\Lambda^{(a)}$, $M^{(b)}$, ... sont des puissances de nombres premiers impairs différents. Ces quaternions proprement dits appartiennent, de plus, à des classes de solutions de la congruence $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 \equiv 0$ qui ne sont pas les mêmes pour tous les modules p^γ, q^δ, ...; car, si deux quaternions, ... $M^{(b)}\Lambda^{(a)}$ et ... $M\Lambda$ par exemple, appartenaient à une même classe représentée par $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, nous aurions, en formant comme plus haut l'expression (30)

$$Z = \zeta_1 + i_{12}\zeta_2 + i_{13}\zeta_3,$$

les deux congruences

$$(38)\quad \ldots M\Lambda Z \equiv 0 \pmod{p^\gamma}; \qquad \ldots M^{(b)}\Lambda^{(a)} Z \equiv 0 \pmod{p^\gamma};$$

nous aurions donc

$$Z'\Lambda' M' \ldots \equiv 0 \pmod{p^\gamma},$$

puis

$$\ldots M^{(b)}\Lambda^{(a)} ZZ'\Lambda' M' \ldots \equiv 0 \pmod{p^{2\gamma}}$$

et, comme on peut faire en sorte que le nombre réel ZZ', divisible par p^γ, ne soit divisible par aucune puissance de p supérieure à p^γ, il viendrait, en divisant par $N(Z)$,

$$\ldots M^{(b)}\Lambda^{(a)}\Lambda' M' \ldots \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

En multipliant, à droite, par les quaternions conjugués aux quaternions $\ldots M'$, et en divisant par les normes $\ldots \mathfrak{N}(M)$ qui sont des nombres premiers à p, on obtient la congruence

$$\ldots M^{(b)}\Lambda^{(a)}\Lambda' \equiv 0 \pmod{p^\gamma};$$

en multipliant ensuite, à gauche, par les quaternions conjugués aux quaternions $\ldots M^{(b)}$, et en divisant par les normes $\ldots \mathfrak{N}(M^{(b)})$ qui sont premières à p, on obtient la congruence

$$\Lambda^{(a)}\Lambda' \equiv 0 \pmod{p^\gamma},$$

de laquelle on conclut que les deux quaternions $\Lambda^{(a)}$ et Λ appartiennent à la même classe de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

On démontre ensuite, de même, que si les congruences (38), prises suivant le module q^δ, sont vérifiées, les deux quaternions $M^{(b)}$ et M appartiennent à la même classe de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{q^\delta},$$

et l'on continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait épuisé tous les facteurs premiers contenus dans m. Deux quelconques des quaternions obtenus, dont le nombre est indiqué par les équations (37), ne peuvent donc appartenir à la même classe de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0,$$

prise suivant tous les modules $p^\gamma, q^\delta, \ldots$.

Enfin, tout quaternion proprement dit A dont la norme est égale à $\sigma p^\gamma q^\delta \ldots$ est contenu dans le système de quaternions que nous avons formé. En effet, comme par rapport à chacun des entiers $p^\gamma, q^\delta, \ldots$, pris comme module, A appartient à une classe déterminée de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0,$$

on peut choisir, parmi les quaternions représentés par l'équation (36), un quaternion Ω appartenant, pour chacun des modules $p^\gamma, q^\delta, \ldots$ à la même classe que A. Si alors on multiplie A par le quaternion Ω', conjugué de Ω, on obtient un quaternion $A\Omega'$ qui, d'après le lemme, est divisible par chacun des facteurs $p^\gamma, q^\delta, \ldots$, et, par suite, est divisible par le produit $p^\gamma q^\delta \ldots$. Comme $\mathfrak{N}(\Omega')$ est un nombre impair, le quaternion $A\Omega'$ ne peut d'ailleurs jamais être divisible par 2, que σ soit égal à 1, 2 ou 4. De l'équation

$$\mathfrak{N}(A\Omega') = \sigma p^{2\gamma} q^{2\delta} \ldots$$

nous tirons

$$\mathfrak{N}\left(\frac{A\Omega'}{p^\gamma q^\delta \ldots}\right) = \sigma.$$

Pour $\sigma = 1$, la norme du quaternion entier proprement dit $\frac{A\Omega'}{p^\gamma q^\delta \ldots}$ est donc égale à l'unité; ce quaternion entier est, par suite, égal à l'une des huit unités I. Pour $\sigma = 2$, le quaternion entier proprement dit $\frac{A\Omega'}{p^\gamma q^\delta \ldots}$ est égal à l'un des vingt-quatre quaternions (18); pour $\sigma = 4$, il est égal à l'un des seize quaternions (34). Nous désignerons par E, pour $\sigma = 2$, l'un quelconque des vingt-quatre quaternions (18); pour

$\sigma = 4$, l'un quelconque des seize quaternions (34). Nous aurons alors

$$(39)\qquad \begin{cases} \text{Pour } \sigma = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots & A\Omega' = Ip^{\gamma}q^{\delta}\ldots \\ \text{Pour } \sigma = 2, 4 \ldots\ldots\ldots & A\Omega' = Ep^{\gamma}q^{\delta}\ldots \end{cases}$$

En multipliant ces équations par Ω, il vient

$$(40)\qquad \begin{cases} \text{Pour } \sigma = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & A = I\Omega \\ \text{Pour } \sigma = 2, 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & A = E\Omega \end{cases}$$

Nous avons déjà montré que les huit quaternions $I\Omega$, correspondant aux huit valeurs de I, sont différents; on montrerait, de même, que les vingt-quatre ou seize quaternions $E\Omega$, correspondant aux vingt-quatre ou seize valeurs de E, sont différents.

Ainsi, le quaternion donné A, à norme m, est égal à un et à un seul des quaternions proprement dits différents qui composent le système de quaternions, à norme m, que nous avons formé.

Connaissant, par les relations (37), le nombre de quaternions proprement dits dont la norme est égale à un nombre entier donné m, on peut trouver facilement le nombre total de quaternions, tant proprement dits qu'impropres, dont la norme est égale à m, en tenant compte de tous les diviseurs communs possibles. On obtient alors le résultat, dû à Jacobi et déjà mentionné plus haut, que ce nombre total est, pour une norme impaire, égal à huit fois la somme de tous les diviseurs de la norme, et, pour une norme paire, égal à huit fois la somme de tous les diviseurs de la norme qui sont impairs ou égaux au double d'un nombre impair.

VII.

Problème. — *Représenter, de toutes les manières possibles, un quaternion proprement dit donné, par un produit de quaternions premiers.*

C'est dans la résolution de ce problème que la différence entre la théorie des entiers complexes de Gauss et celle des quaternions entiers va nettement s'accuser.

Une fois que l'on a représenté, d'une certaine manière, un nombre complexe entier proprement dit par un produit de nombres premiers complexes pris dans un ordre déterminé, on sait que, pour le représenter de toutes les manières possibles, il suffit de permuter de toutes les manières possibles les nombres premiers complexes. Au contraire, une fois que l'on a trouvé tous les quaternions premiers dont les normes sont des diviseurs de la norme d'un quaternion entier proprement dit donné, on peut fixer arbitrairement un certain ordre pour les normes de ces quaternions premiers, et cet ordre détermine, comme nous allons le montrer, ceux de ces quaternions premiers dont le produit, pris dans cet ordre, est égal au quaternion proprement dit donné.

En effet, soit A un quaternion entier proprement dit donné dont la norme $\mathfrak{N}(A)$ est un nombre impair ou le double d'un nombre impair et soit p un nombre premier, pair ou impair, arbitrairement choisi parmi les facteurs de $\mathfrak{N}(A)$; A appartient à une classe déterminée (ξ_1, ξ_2, ξ_3) de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Soit P un quaternion premier dont la norme soit égale à p et qui appartienne à la même classe de solutions (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Le produit AP′ est alors divisible par p; en désignant par G un quaternion entier, on peut donc écrire

$$AP' = pG. \tag{1}$$

Comme $\mathfrak{N}(P') = p$, on déduit de cette égalité la suivante :

$$A = GP. \tag{2}$$

Le quaternion proprement dit donné A est ainsi mis sous la forme d'un produit dont le facteur de gauche est un quaternion entier proprement dit G, et le facteur de droite un quaternion premier P, à norme p, appartenant à la classe de solutions (ξ_1, ξ_2, ξ_3) de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p}$ à laquelle appartient le quaternion A lui-même. On reconnaît aussi, en raisonnant comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, que si l'on demande de mettre un quaternion entier proprement dit donné A sous la forme d'un produit de deux facteurs dont le premier, celui de gauche, soit un quaternion entier et le second,

celui de droite, un quaternion premier à norme p, ce dernier appartient nécessairement à la même classe de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p}$ que le quaternion donné A. Dans l'équation (2), le quaternion premier P est donc entièrement déterminé; on peut toutefois remplacer P par un des huit quaternions IP.

Répétons maintenant sur le quaternion entier proprement dit G le raisonnement que nous venons de faire sur le quaternion entier proprement dit donné A. Nous commençons par choisir arbitrairement parmi les facteurs de $\frac{\mathfrak{N}(A)}{p}$ un nombre premier q qui peut d'ailleurs être différent de p ou égal à p. La classe de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{q}$ à laquelle appartient G détermine entièrement, à des facteurs près I, le quaternion premier dont la norme est égale à q et qui est facteur de droite de G. Si, au lieu de P, on avait choisi précédemment, dans l'équation (2), le quaternion IP, il faudrait, pour former la classe de solutions de la congruence

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } q),$$

prendre, au lieu de G, le quaternion GI; il en résulterait un changement de classe donné par les équations (12′) du § IV.

On peut continuer ainsi jusqu'à ce qu'on ait déterminé le dernier quaternion premier, avec l'unité qui doit le multiplier à gauche, et reconstitué ainsi le quaternion A.

Dans le cas où la norme $\mathfrak{N}(A)$ du quaternion entier proprement dit donné est divisible par 4, on peut appliquer la même méthode tant que l'on choisit des facteurs premiers *impairs* de $\mathfrak{N}(A)$ pour les normes des facteurs premiers cherchés de A, comptés de la droite vers la gauche. Mais, lorsqu'on fixe, pour la première fois, le nombre entier 2 comme norme du facteur premier à former, on peut choisir pour ce facteur premier *l'un quelconque* des 24 quaternions premiers E qui appartiennent cependant aux trois classes différentes de solutions de la congruence $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv 0 \pmod{2}$. En effet, soit B le quaternion entier proprement dit dont la norme est divisible par le nombre entier 4 et que l'on veut mettre sous la forme d'un produit de deux facteurs dont le second (celui de droite) soit un quaternion premier ayant une norme égale au nombre entier 2. Soit E l'un quel-

conque des quaternions premiers de norme 2. Le produit BE est un quaternion dont la norme est divisible par 8, mais n'est divisible par aucune puissance plus élevée de 2. Ce produit ne peut donc être que le double d'un quaternion entier proprement dit C. De l'équation

$$BE = 2C$$

nous déduisons, en multipliant, à droite, par le quaternion premier E′ conjugué de E et en tenant compte de ce que C est un quaternion proprement dit, l'équation

$$B = CE';$$

E′ est, comme E, l'un quelconque des 24 quaternions premiers dont la norme est égale à 2, et C est un quaternion entier proprement dit dont la norme est impaire ou égale au double d'un nombre impair. La détermination des facteurs de C rentre donc dans le cas précédent.

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant :

On peut toujours représenter un quaternion entier proprement dit donné, dont la norme est un nombre impair ou le double d'un nombre impair, par un produit de quaternions premiers, en imposant à ces quaternions de se suivre, de droite à gauche, dans un ordre tel que leurs normes suivent un ordre fixé arbitrairement pour les facteurs premiers de la norme du quaternion donné. Chacun des quaternions premiers qui figurent dans le produit appartient alors à une classe de solutions déterminée, de proche en proche, sans ambiguïté. Tout se passe de même pour les quaternions entiers proprement dits dont la norme est divisible par 4 jusqu'à ce que l'ordre fixé pour les facteurs de cette norme amène pour la première fois le nombre 2. On peut alors choisir arbitrairement, comme facteur premier, l'un quelconque des 24 quaternions premiers dont la norme est égale à 2. Ce choix une fois fait, les classes de solutions auxquelles appartiennent les quaternions premiers dont les normes sont les nombres premiers suivants, pris dans l'ordre indiqué, sont déterminées, de proche en proche, sans ambiguïté, jusqu'à la fin.

Prenons comme exemple le quaternion

$$-1+3i_{12}+i_{13}+2i_{23}$$

dont la norme est égale à 15. Il appartient à la classe de solutions de la congruence

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\equiv 0 \qquad (\text{mod } 3)$$

qui est représentée par le système

$$\xi_1\equiv 1, \qquad \xi_2\equiv 2, \qquad \xi_3\equiv 2 \qquad (\text{mod } 3)$$

et à la classe de solutions de la congruence

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\equiv 0 \qquad (\text{mod } 5)$$

qui est représentée par le système

$$\xi_1\equiv 0, \qquad \xi_2\equiv 1, \qquad \xi_3\equiv 2 \qquad (\text{mod } 5).$$

Les quaternions

$$1+i_{12}+i_{13}, \quad 1+i_{12}-i_{13}, \quad 1-i_{12}+i_{13}, \quad 1-i_{12}-i_{13},$$

dont la norme est 3, appartiennent aux quatre classes de solutions possibles de la première des deux congruences précédentes.

Les quaternions

$$1+2i_{12}, \quad 1-2i_{12}, \quad 1+2i_{13}, \quad 1-2i_{13}, \quad 1+2i_{23}, \quad 1-2i_{23},$$

dont la norme est 5, appartiennent aux six classes de solutions possibles de la seconde des deux congruences précédentes.

Pour mettre le quaternion donné, dont la norme est égale à 3.5, sous la forme d'un produit de deux facteurs, nous pouvons demander que la norme du facteur de droite soit égale à 3; nous obtenons alors la solution

$$-1+3i_{12}+i_{13}+2i_{23}=(1+2i_{12})(1+i_{12}+i_{13});$$

mais nous pouvons aussi demander que la norme du facteur de droite soit égale à 5 : nous obtenons alors la solution

$$-1 + 3i_{12} + i_{13} + 2i_{23} = -(1 - i_{12} + i_{13})(1 - 2i_{23}).$$

Dans les deux manières précédentes de représenter le même quaternion, les facteurs premiers qui correspondent à chacune des deux normes appartiennent à des classes de solutions différentes.

VIII.

Substitutions, à coefficients rationnels, qui transforment une somme de trois carrés en elle-même. Composition de ces substitutions.

La théorie que nous venons de développer, de la décomposition des quaternions entiers en quaternions premiers, nous permet d'écrire toutes les substitutions, à coefficients rationnels, qui transforment une somme de trois carrés en elle-même. Euler a, le premier, appelé l'attention sur ces substitutions dans son Mémoire déjà cité : *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*. On peut, comme nous l'avons montré dans le § III, passer de toute substitution à coefficients rationnels transformant une somme de trois carrés en elle-même et ayant un déterminant égal à $+1$ à une autre substitution semblable pour laquelle le déterminant (3) est différent de zéro. Les équations (7) du § III nous montrent que la substitution rationnelle choisie conduit à quatre nombres entiers réels λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23}, n'ayant aucun diviseur commun, entièrement déterminés, au même facteur ± 1 près. A cette substitution rationnelle correspond donc un quaternion entier proprement dit, déterminé au facteur ± 1 près,

$$(1) \qquad \pm(\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23}).$$

Quatre des huit quaternions

$$(2) \qquad I(\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23}),$$

qui appartiennent à la même classe de solutions, nous donnent ensuite

les substitutions provenant de la substitution choisie en changeant les signes des coefficients de deux quelconques des trois colonnes. Pour obtenir toutes les substitutions rationnelles, il faut donc considérer tous les quaternions entiers proprement dits.

Les équations (25) du § III nous donnent les coefficients α_{11}, α_{12}, ..., α_{33} de la substitution correspondant à un quaternion entier proprement dit donné Λ, sous forme de fractions dont le dénominateur commun est $\mathfrak{N}(\Lambda)$. Nous pouvons nous demander si le dénominateur et tous les numérateurs de ces fractions ont des diviseurs communs. Le plus grand commun diviseur T des quatre nombres entiers

$$(3)\qquad \begin{cases} \lambda_0^2 - \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2, & \lambda_0^2 - \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 - \lambda_{23}^2; \\ \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 - \lambda_{23}^2, & \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2, \end{cases}$$

divise nécessairement les quatre nombres entiers

$$4\lambda_0^2, \quad 4\lambda_{12}^2, \quad 4\lambda_{13}^2, \quad 4\lambda_{23}^2;$$

donc, comme Λ est un quaternion proprement dit, T ne peut être qu'un diviseur de 4, c'est-à-dire l'un des nombres 1, 2, 4. Si le nombre entier $\mathfrak{N}(\Lambda)$ est impair, il vient $T = 1$ et l'on ne peut amener les expressions précédentes des coefficients α_{11}, α_{12}, ..., α_{33} à avoir un dénominateur commun plus petit que $\mathfrak{N}(\Lambda)$. Si $\mathfrak{N}(\Lambda)$ est le double d'un nombre impair, deux des quatre nombres λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} sont pairs et deux sont impairs; les numérateurs des expressions trouvées pour α_{11}, ..., α_{33} sont donc tous pairs; il vient $T = 2$ et l'on peut simplifier chacune des fractions par 2. Si $\mathfrak{N}(\Lambda)$ est le quadruple d'un nombre impair, les quatre nombres λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} sont impairs; leurs carrés sont, par suite, congrus à 1 suivant le module 8; les numérateurs des expressions trouvées pour α_{11}, ..., α_{33} sont donc tous divisibles par 4; il vient $T = 4$ et l'on peut simplifier chacune des fractions par 4. On voit donc que, si l'on ramène au plus petit dénominateur commun possible les coefficients des substitutions rationnelles qui transforment une somme de trois carrés en elle-même, ce dénominateur est nécessairement un nombre impair.

Il en est de même, comme nous l'avons vu, pour les substitutions

rationnelles qui transforment une somme de deux carrés en elle-même. Mais dans ces dernières le dénominateur réduit ne peut contenir en facteur que des nombres premiers de la forme $4r+1$, tandis que dans les substitutions rationnelles qui transforment une somme de trois carrés en elle-même, le dénominateur réduit peut être un nombre impair quelconque.

A la multiplication des quaternions correspond la composition des substitutions. Comme tout quaternion entier proprement dit peut, par le procédé indiqué, être obtenu en multipliant dans un ordre fixé arbitrairement des quaternions premiers entièrement déterminés par cet ordre, la substitution rationnelle correspondant à un quaternion entier proprement dit pourra être obtenue en composant dans le même ordre les substitutions rationnelles qui correspondent à ces quaternions premiers. Les trois quaternions premiers

$$(4) \qquad 1+i_{23}, \quad 1+i_{31}, \quad 1+i_{12},$$

dont la norme est égale à 2, appartiennent aux trois classes possibles de solutions de la congruence $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\equiv 0 \pmod 2$ [*comparez* (18), § VI]. Ces trois quaternions déterminent les trois substitutions

$$(5_a) \qquad x_1=y_1, \qquad x_2=y_3, \qquad x_3=-y_2;$$

$$(5_b) \qquad x_1=-y_3, \qquad x_2=y_2, \qquad x_3=y_1;$$

$$(5_c) \qquad x_1=y_2, \qquad x_2=-y_1, \qquad x_3=y_3.$$

Les coefficients de ces substitutions sont des nombres entiers, ce qui est d'accord avec ce que nous disions tout à l'heure du dénominateur commun réduit, des substitutions rationnelles qui transforment une somme de trois carrés en elle-même. Si, au contraire, la norme est un nombre premier impair p, chaque quaternion premier appartenant à l'une des $(p+1)$ classes possibles de solutions de la congruence $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\equiv 0 \pmod p$ détermine une substitution rationnelle dont le dénominateur commun réduit autant que possible est le nombre p lui-même.

Nous avons déterminé, dans le § VI, le nombre des quaternions proprement dits dont la norme est un nombre entier donné, impair, ou

double, ou quadruple d'un nombre impair. Il est facile d'en déduire le nombre des substitutions rationnelles dont les coefficients ont pour dénominateur commun réduit autant que possible un nombre impair donné. Comme la norme de tout quaternion correspondant aux substitutions rationnelles dont on cherche le nombre est égale au nombre impair donné ou au double ou au quadruple de ce nombre impair, et comme deux quaternions A et — A déterminent la même substitution, le nombre cherché est égal à la moitié de la somme des nombres exprimant le nombre de quaternions entiers proprement dits dont la norme est l'entier impair donné, le nombre de quaternions entiers proprement dits dont la norme est le double de cet entier donné, et le nombre de quaternions entiers proprement dits dont la norme est le quadruple de cet entier donné.

Nous avons donné, dans le § VII, un procédé qui permet de représenter un quaternion entier proprement dit quelconque donné par un produit de quaternions premiers; nous avons vu que l'ordre de succession des normes de ces quaternions premiers étant une fois fixé, les quaternions premiers sont déterminés. On en déduit immédiatement le procédé qui permet de représenter une quelconque des substitutions rationnelles qui nous occupent, en composant des substitutions rationnelles dont les dénominateurs soient les facteurs premiers impairs contenus dans le dénominateur de la substitution rationnelle donnée que l'on cherche à représenter; l'ordre de succession de ces facteurs premiers impairs, auxquels il faut ajouter parfois une ou deux fois le facteur 2, étant une fois fixé, les substitutions composantes sont déterminées; celles qui correspondent au facteur 2 sont les substitutions entières (5_a) ou (5_b) ou (5_c).

Les problèmes résolus pour les quaternions entiers trouvent donc une application immédiate et complète dans la théorie arithmétique des substitutions à coefficients rationnels qui transforment une somme de trois carrés en elle-même.

Sur une loi de Fresnel;

PAR M. E. JABLONSKI,
Professeur au lycée Charlemagne.

1. La loi dont il s'agit a été formulée par Fresnel, sous forme d'hypothèse qui lui a servi à établir la théorie mécanique de la réfraction; c'est la suivante :

Dans deux milieux éthérés différents, les carrés des vitesses de propagation des ondes planes sont en raison inverse des densités de ces milieux.

C'est-à-dire que, si l'on désigne par δ la densité de l'éther libre, par δ' celle de l'éther qui pénètre un corps pondérable transparent, et par r l'indice de réfraction de ce corps, supposé isotrope, on a

$$r^2 = \frac{\delta'}{\delta}.$$

Dans ce même Journal [1], j'ai publié le résultat de mes recherches mathématiques sur les déformations que l'éther libre subit lorsqu'il pénètre dans un corps pondérable, et j'ai donné le moyen de les calculer en fonction des masses des particules pondérables et de leurs distances mutuelles.

[1] Mai et octobre 1884 (t. X).

Les formules trouvées donnent des résultats intimement liés à la structure du corps, et permettent sans aucune hypothèse nouvelle, autre que l'action à distance, de rendre compte des différences marquées que l'observation révèle dans l'état de l'éther qui pénètre un corps suivant les différents systèmes cristallins auxquels ce corps peut appartenir.

Ces formules ont fourni des résultats qui paraissent conformes aux données de l'expérience, et ont conduit, pour la classification des cristaux, en ce qui concerne leurs propriétés optiques et géométriques, à des lois que l'expérience seule n'avait pas encore données; il y a lieu de penser qu'elles ne sont pas contraires à la réalité, mais elles sont en désaccord complet avec la loi de Fresnel, rappelée plus haut, et l'objet de ce travail est de lever cette difficulté.

En désignant par $\frac{m^2\mu}{r^n}$ le terme prépondérant, aux très petites distances, de la fonction qui exprime l'action mutuelle de deux particules d'éther de masse m, à la distance r, μ étant une constante, et par g_1 une autre constante qui dépend de la structure du milieu [1], on a trouvé

$$r'^2 = (1 + g_1)^{n-1}$$

et

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{(1 + g_1)^3}$$

pour que la loi de Fresnel fût vraie, il faudrait

$$(1 + g_1)^{n+2} = 1,$$

d'où $n = -2$, c'est-à-dire que l'action mutuelle de deux particules d'éther croîtrait avec leur distance, ce qui ne peut être.

Indépendamment de nos formules, on pouvait voir *a priori* que la loi considérée est en contradiction avec le principe même de la théorie de Fresnel qui, comme celle de Cauchy, repose sur l'action à distance, action d'autant plus forte que la distance est plus faible. En effet, en partant de ce principe, Cauchy est parvenu à l'expression de la vitesse

[1] Mai 1884, p. 165 et suivantes (t. X).

de propagation des vibrations transversales dont le carré est égal à

$$\frac{4-n}{2.3.5}\sum\frac{m\mu}{r^{n-1}},$$

le Σ se rapportant à tout le fluide éthéré.

Si n est positif et supérieur à 1, ce qui ne fait aucun doute, parce que l'action des particules les plus voisines est certainement prépondérante, la vitesse est d'autant plus grande que la distance moyenne des particules d'éther est plus petite et, par suite, que la densité est plus grande : c'est justement le contraire de ce que veut la loi de Fresnel.

Si l'on se reporte aux raisonnements par lesquels l'illustre physicien a été conduit aux équations qui donnent les intensités des rayons réfléchis et des rayons réfractés, on remarque qu'ils restent les mêmes, *quelle que soit la nature du fluide vibrant.*

Les conclusions subsisteraient donc pour un fluide hypothétique que l'on peut imaginer à volonté. Ainsi rien n'empêche d'étendre les conséquences trouvées à un fluide dont les particules se repousseraient suivant la loi $\frac{m^2\mu}{r^n}$, quand bien même ce fluide n'existerait pas dans la nature. Or, on a vu précédemment que, pour n positif, la loi de Fresnel n'est pas vérifiée.

Prise en rigueur, la loi de Fresnel est incompatible avec la dispersion; car, si un rayon de lumière blanche tombe sur un morceau de verre, par exemple, la dispersion n'existant pas dans le vide, toutes les ondes qui composent la lumière incidente ont même vitesse de propagation avant la réfraction, et acquièrent ensuite, selon la durée de leur vibration, c'est-à-dire selon leur couleur, des vitesses différentes dans l'éther qui pénètre le verre; il faudrait donc admettre pour cet éther autant de densités différentes qu'il y a de couleurs dans le spectre. Il est vrai que l'on pourrait n'appliquer la loi qu'en négligeant la dispersion; mais alors on ne satisferait plus à l'équation des forces vives, et c'est pour y satisfaire que l'on est obligé d'accepter la loi, ainsi qu'on le verra plus loin, lorsqu'on interprète d'une manière inexacte la théorie de la réfraction fondée sur le principe de la continuité.

Toutes ces raisons conduisent à penser que la loi de Fresnel est inexacte, d'autant plus qu'elle est *absolument inutile*. On peut voir

dans ce même Journal ([1]) les formules relatives à la double réfraction uniaxiale et biaxiale; elles ont été établies sans le secours de la loi, et subsistent si on la rejette. Ces formules donnent toutes les lois connues de ces phénomènes, l'ellipsoïde de Huygens, la surface du quatrième degré de Fresnel, etc.; on peut consulter à ce sujet l'*Essai sur la lumière*, de Briot. Plus loin, nous montrerons que le calcul des intensités des rayons réfléchis et des rayons réfractés n'exige pas non plus cette loi. D'ailleurs, pour ne laisser aucun doute sur ce sujet important, je vais reprendre la théorie générale de la réfraction et de la réflexion, et l'appliquer au cas particulier considéré par Fresnel, et à l'occasion duquel il a énoncé la loi en question, puis au cas le plus général.

2. *Théorie générale de la réfraction et de la réflexion.* — La théorie de la réfraction et de la réflexion, telle que l'a donnée Cauchy et telle que la pressentait Fresnel lui-même, repose sur le principe de la continuité du mouvement, que l'on peut, ce me semble, énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'un mouvement se transforme en un autre, l'état initial de celui qui prend naissance est justement l'état final du mouvement antérieur, c'est-à-dire l'état de ce mouvement en tous les points de l'espace où se fait la transformation.

Voyons comment on peut traduire analytiquement ce principe.

Soient ξ, η, ζ les déplacements comptés suivant trois axes rectangulaires; ce sont des fonctions du temps t et des coordonnées x, y, z de la position du point matériel à l'époque t. Soient

$$\xi = \varphi(x, y, z, t),$$
$$\eta = \psi(x, y, z, t),$$
$$\zeta = \chi(x, y, z, t).$$

Imaginons que ces fonctions soient définies par des équations aux différentielles partielles du deuxième ordre par rapport à x, y, z, et d'un

([1]) Mai 1884, p. 173 et suivantes.

ordre quelconque par rapport à t; cela a lieu effectivement pour le son, pour la lumière, pour la chaleur et pour le mouvement quelconque d'un fluide lorsqu'il y a une fonction de vitesses, et en particulier lorsqu'il est mis en mouvement par une percussion. On veut transformer le mouvement de toutes les particules qui sont, à un instant donné, sur une certaine surface, dite *surface de séparation*, en d'autres satisfaisant aussi à des équations aux différentielles partielles de même ordre que les précédentes, et cela de manière que le principe de continuité soit observé, c'est-à-dire que le nouveau mouvement soit la continuation du mouvement antérieur, ce qui est le cas de la nature. Soient, dans le nouveau mouvement,

$$\xi_1 = \varphi_1(x, y, z, t),$$
$$\eta_1 = \psi_1(x, y, z, t),$$
$$\zeta_1 = \chi_1(x, y, z, t)$$

les expressions des déplacements en un point; les fonctions φ_1, ψ_1, χ_1 seront complètement déterminées par les équations différentielles qui les lient, si l'état initial du mouvement est connu.

Or, pour fixer les idées, imaginons d'abord le cas où la transformation se ferait en tous les points d'un plan pris pour plan des xy, et dont l'équation serait, par suite, $z = 0$. Pour connaître l'état initial du nouveau mouvement, il faut avoir les valeurs de φ_1, ψ_1, χ_1 et $\frac{d\varphi_1}{dz}$, $\frac{d\psi_1}{dz}$, $\frac{d\chi_1}{dz}$ pour $z = 0$ et pour toutes les valeurs possibles des autres variables x, y, t. Le principe de continuité, sous la forme où nous l'avons présenté, donnera

$$\varphi_1 = \varphi, \qquad \frac{d\varphi_1}{dz} = \frac{d\varphi}{dz},$$
$$\psi_1 = \psi, \qquad \frac{d\psi_1}{dz} = \frac{d\psi}{dz},$$
$$\chi_1 = \chi, \qquad \frac{d\chi_1}{dz} = \frac{d\chi}{dz}$$

pour $z = 0$ et pour toutes les valeurs possibles de x, y, t.

Dans le cas le plus général, ces conditions ne sont pas plus difficiles à trouver.

Si la surface de séparation est une sphère, on emploiera les coordonnées sphériques ordinaires ρ, θ, ω, et si pour la sphère on a

$$\rho = r,$$

on écrira

$$\varphi_1 = \varphi, \qquad \frac{d\varphi_1}{d\rho} = \frac{d\varphi}{d\rho},$$

$$\psi_1 = \psi, \qquad \frac{d\psi_1}{d\rho} = \frac{d\psi}{d\rho},$$

$$\chi_1 = \chi, \qquad \frac{d\chi_1}{d\rho} = \frac{d\chi}{d\rho}$$

pour $\rho = r$ et pour toutes les valeurs possibles de θ, ω et t.

Si la surface n'est pas développable, on peut la considérer comme l'enveloppe d'un plan

$$x \sin\theta \cos\omega + y \sin\theta \sin\omega + z \cos\theta - f(\theta, \omega) = 0,$$

où θ et ω sont deux variables indépendantes : ce sont les angles propres à définir la direction de la normale au plan ; $f(\theta, \omega)$ est une fonction de ces variables dépendant de la nature de la surface, et une constante dans le cas particulier d'une sphère ayant pour centre l'origine. Les coordonnées d'un point de la surface sont données par cette équation jointe aux suivantes

$$x \cos\theta \cos\omega + y \cos\theta \sin\omega - z \sin\theta - \frac{df}{d\theta} = 0,$$

$$-x \sin\theta \sin\omega + y \sin\theta \cos\omega - \frac{df}{d\omega} = 0,$$

que l'on en déduit en différentiant la première successivement par rapport à θ et à ω. Actuellement, si à la première on substitue celle-ci :

$$x \sin\theta \cos\omega + y \sin\theta \sin\omega + z \cos\theta - f(\theta, \omega) = \rho,$$

ρ étant une variable indépendante, et qu'on l'adjoigne aux deux autres, on obtiendra une famille de surfaces dont la proposée fait partie, et qu'on retrouve pour $\rho = 0$.

On voit sans peine que ρ est une longueur portée sur la normale en un point de la surface considérée et dans une direction convenable suivant son signe. Les équations aux différentielles partielles par rapport à x, y, z se changent en équations aux différentielles partielles du même ordre par rapport à ρ, θ et ω qui constituent un système de coordonnées d'un usage très général et très commode pour notre objet.

Pour traduire le principe de continuité, on sera maintenant conduit à écrire que, pour $\rho = 0$ et pour toutes les valeurs possibles de θ, ω et t, on a

$$\varphi_1 = \varphi, \qquad \frac{d\varphi_1}{d\rho} = \frac{d\varphi}{d\rho},$$

$$\psi_1 = \psi, \qquad \frac{d\psi_1}{d\rho} = \frac{d\psi}{d\rho},$$

$$\chi_1 = \chi, \qquad \frac{d\chi_1}{d\rho} = \frac{d\chi}{d\rho}.$$

Si la surface est développable, θ et ω sont liées par une équation, ω peut être considéré comme fonction de θ; on conservera une des variables x, y ou z avec θ et ρ.

Dans certains cas particuliers, on peut simplifier la question par un choix de coordonnées indiqué par la nature de la surface de séparation. Ainsi, s'il s'agit d'un cône de révolution dont l'angle générateur serait θ', on dirigera l'axe des z suivant l'axe du cône, on prendra dans le plan perpendiculaire mené par le sommet deux axes rectangulaires quelconques Ox et Oy menés par ce point, puis on adoptera les coordonnées sphériques ordinaires ρ, θ, ω.

On aura alors, pour $\theta = \theta'$ et pour toutes les valeurs possibles de ω, ρ et t,

$$\varphi_1 = \varphi, \qquad \frac{d\varphi_1}{d\theta} = \frac{d\varphi}{d\theta},$$

$$\psi_1 = \psi, \qquad \frac{d\psi_1}{d\theta} = \frac{d\psi}{d\theta},$$

$$\chi_1 = \chi, \qquad \frac{d\chi_1}{d\theta} = \frac{d\chi}{d\theta},$$

et ainsi de suite dans chaque cas particulier.

Les conditions générales trouvées, et qui ne sont que la traduction immédiate du principe énoncé plus haut, contiennent la théorie la plus complète de la réflexion et de la réfraction, et plus généralement encore de tous les changements que peuvent produire dans le mouvement d'un fluide ou d'une partie d'un fluide des obstacles, des forces nouvelles qui, à un certain instant, viendraient à être appliquées à tous les points ou à quelques-uns seulement, et enfin les variations sinon brusques, du moins très rapides de la densité et de la constitution du milieu. Elles ne supposent pas les mouvements très petits. Au fond, ces conditions n'expriment rien autre chose qu'une décomposition du mouvement incident en plusieurs autres, dont l'ensemble lui est rigoureusement équivalent.

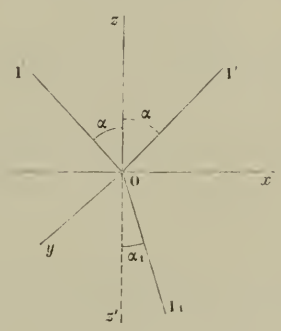
Il est facile de voir que, moyennant ces conditions, la force vive totale du nouveau mouvement est la même dans son état initial que celle du mouvement incident dans son état final, en tous les points de la surface de séparation. En effet, en tout point, dans l'un et l'autre mouvement, la vitesse s'exprime de la même manière au moyen des fonctions φ, ψ et χ et de leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à t et par rapport aux coordonnées du point; or, d'après les conditions écrites en tous les points de la surface de séparation, ces fonctions et toutes leurs dérivées du premier ordre sont égales; les vitesses sont donc les mêmes. Les particules situées sur cette surface sont, dans l'un et l'autre cas, animées du même mouvement et, par suite, la force vive reste la même.

Mais, actuellement, deux cas sont à considérer, selon que le nouveau mouvement ou les composantes de ce mouvement vont continuer à se propager dans un milieu de même composition que celui où se propageait le mouvement incident, c'est le cas du mouvement réfléchi, ou dans un milieu de composition différente, c'est le cas du mouvement réfracté. Pour fixer les idées, considérons, ce qui suffit pour notre objet, un mouvement vibratoire que l'on peut toujours constituer d'ondes planes; dans le premier cas, la densité restant la même, il n'y a rien à changer aux amplitudes initiales tirées des conditions générales, pour que la force vive du mouvement réfléchi reste la même que sur la surface de séparation; dans le second cas, il n'en est plus ainsi, l'amplitude de chaque onde plane devra changer avec la densité, de

façon que l'intensité reste la même. Dans ce dernier cas, les conditions générales ne sont plus suffisantes pour déterminer complètement le mouvement réfracté en un point qui n'est pas sur la surface de séparation; il faut y joindre l'équation des forces vives.

Nous allons appliquer ces considérations générales au cas simple étudié par Fresnel, et à d'autres plus étendus.

3. *Étude d'un cas particulier.* — La surface réfléchissante étant supposée plane, la surface de séparation sera un plan parallèle à cette surface et à une très petite distance, comparable au rayon de la sphère d'action d'une particule pondérable hors du corps. Nous la prendrons pour plan des xy, et nous prendrons pour direction positive de l'axe



des z la direction extérieure de la normale. Le rayon incident étant IO, nous prendrons le plan d'incidence IOZ pour plan des xz, et nous supposerons la vibration polarisée, rectiligne et s'exécutant perpendiculairement au plan d'incidence, c'est-à-dire suivant Oy.

Soient donc

$$\xi = 0, \qquad \eta = B e^{i(ax+cz-st)}, \qquad \zeta = 0$$

les composantes de cette vibration persistante; B est l'amplitude, a, c, s sont réels, i est mis pour $\sqrt{-1}$.

Le plan des xy est censé séparer deux milieux éthérés, savoir l'éther libre au-dessus, et au-dessous l'éther modifié par la présence d'un corps pondérable isotrope. Dans chacun de ces milieux peuvent se propager des vibrations longitudinales et des vibrations transversales. Dans

l'éther libre, pour une vibration transversale dont les composantes seraient

$$\xi = A\, e^{i(ax+by+cz-st)},$$

$$\eta = B\, e^{i(ax+by+cz-st)},$$

$$\zeta = C\, e^{i(ax+by+cz-st)},$$

on a

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

et

$$s^2 = (g+h)(a^2+b^2+c^2),$$

g et h étant deux constantes ([1]).

Pour une vibration longitudinale, on a

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

et

$$s^2 = (g+3h)(a^2+b^2+c^2).$$

Dans l'éther modifié, on a des formules semblables; il suffit de remplacer g par $\frac{g}{(1+g_1)^{n-1}}$ et h par $\frac{h}{(1+g_1)^{n-1}}$ ([2]), abstraction faite de la dispersion.

Cela posé, imaginons que l'on décompose le mouvement incident en autant de vibrations qu'il peut s'en propager dans l'un et l'autre milieu, et conformément au principe de la continuité.

Soient

$$A'\, e^{i(a'x+b'y+c'z-s't)},$$

$$A''\, e^{i(a''x+b''y+c''z-s''t)},$$

. . . . . .

$$B'\, e^{i(a'x+b'y+c'z-s't)},$$

$$B''\, e^{i(a''x+b''y+c''z-s''t)},$$

. . . . . .

$$C'\, e^{i(a'x+b'y+c'z-s't)},$$

$$C''\, e^{i(a''x+b''y+c''z-s''t)},$$

. . . . . .

([1]) Mai 1884, p. 153, t. X.

([2]) Mai 1884, p. 169.

les composantes suivant les axes de coordonnées de ces vibrations dans le milieu supérieur. Soient, de même,

$$
\begin{aligned}
&A_1 e^{i(a_1x+b_1y+c_1z-s_1t)},\\
&A_2 e^{i(a_2x+b_2y+c_2z-s_2t)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&B_1 e^{i(a_1x+b_1y+c_1z-s_1t)},\\
&B_2 e^{i(a_2x+b_2y+c_2z-s_2t)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&C_1 e^{i(a_1x+b_1y+c_1z-s_1t)},\\
&C_2 e^{i(a_2x+b_2y+c_2z-s_2t)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

les composantes de vibrations ayant même longueur d'onde et même durée que celles qui se propagent dans le milieu inférieur, mais non même amplitude.

Les conditions générales données dans le numéro précédent sont ici, pour $z = 0$,

$$
\begin{aligned}
&A' e^{i(a'x+b'y-s't)} + A'' e^{i(a''x+b''y-s''t)} + \ldots\\
&\qquad + A_1 e^{i(a_1x+b_1y-s_1t)} + A_2 e^{i(a_2x+b_2y-s_2t)} + \ldots = 0,\\
&B' e^{i(a'x+b'y-s't)} + B'' e^{i(a''x+b''y-s''t)} + \ldots\\
&\qquad + B_1 e^{i(a_1x+b_1y-s_1t)} + B_2 e^{i(a_2x+b_2y-s_2t)} + \ldots = B e^{i(ax-st)},\\
&C' e^{i(a'x+b'y+s't)} + C'' e^{i(a''x+b''y-s''t)} + \ldots\\
&\qquad + C_1 e^{i(a_1x+b_1y-s_1t)} + C_2 e^{i(a_2x+b_2y-s_2t)} + \ldots = 0,\\
&c' A' e^{i(a'x+b'y-s't)} + c'' A'' e^{i(a''x+b''y-s''t)} + \ldots\\
&\qquad + c_1 A_1 e^{i(a_1x+b_1y-s_1t)} + c_2 A_2 e^{i(a_2x+b_2y-s_2t)} + \ldots = 0,\\
&c' B' e^{i(a'x+b'y-s't)} + c'' B'' e^{i(a''x+b''y-s''t)} + \ldots\\
&\qquad + c_1 B_1 e^{i(a_1x+b_1y-s_1t)} + c_2 B_2 e^{i(a_2x+b_2y-s_2t)} + \ldots = c B e^{i(ax-st)},\\
&c' C' e^{i(a'x+b'y-s't)} + c'' C'' e^{i(a''x+b''y-s''t)} + \ldots\\
&\qquad + c_1 C_1 e^{i(a_1x+b_1y-s_1t)} + c_2 C_2 e^{i(a_2x+b_2y-s_2t)} + \ldots = 0.
\end{aligned}
$$

Comme elles doivent avoir lieu pour toutes les valeurs possibles de x,

y, t, on en conclut

$$a' = a'' = \ldots = a_1 = a_2 = \ldots = a,$$
$$b' = b'' = \ldots = b_1 = b_2 = \ldots = 0,$$
$$s' = s'' = \ldots = s_1 = s_2 = \ldots = s.$$

Considérons la première vibration et supposons-la transversale. Dans le milieu supérieur, on a

$$(g + h)(a^2 + c^2) = s^2$$

et

$$(g + h)(a'^2 + c'^2) = s'^2;$$

donc, comme $a = a'$ et $s = s'$, on a

$$c'^2 = c^2 \qquad \text{ou} \qquad c' = \pm c.$$

Le signe + redonnerait l'onde incidente, il faut prendre le signe −. On a ainsi une vibration transversale réfléchie persistante. C'est la *seule*, car on n'a trouvé pour c' qu'une seule valeur admissible. Les cosinus directeurs de la normale à l'onde incidente, c'est-à-dire du rayon incident, étant $\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$, 0 et $\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$, ceux du rayon réfléchi répondant à la vibration transversale sont $\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$, 0, $\frac{-c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$, par conséquent ce rayon est dans le plan d'incidence, et fait, avec la normale Oz de l'autre côté, le même angle que le rayon incident. Les longueurs d'onde l et l' du rayon incident et du rayon réfracté sont respectivement $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ et $\frac{2\pi}{\sqrt{a'^2 + c'^2}}$: elles sont donc égales. Enfin les durées de la vibration sont $\frac{2\pi}{s}$ et $\frac{2\pi}{s'}$, et, par suite, aussi les mêmes. On a, en outre,

$$Aa + Cc = 0.$$

Prenons maintenant la seconde vibration, elle est nécessairement longitudinale. On a

$$(g + h)(a^2 + c^2) = s^2$$

et

$$(g+3h)(a''^2+c''^2)=s''^2=s^2.$$

Comme $a''=a$, on en conclut

$$(g+3h)(a^2+c''^2)=(g+h)(a^2+c^2).$$

De là deux valeurs de c'' égales et de signes contraires; il faudra prendre la valeur positive, car la négative donnerait une onde longitudinale incidente. On a, en outre,

$$\frac{A''}{a}=\frac{C''}{c''} \qquad \text{et} \qquad B''=0;$$

on aurait ainsi une vibration longitudinale réfléchie et une seule, mais on verra par la suite que son amplitude est nulle. Il ne peut pas y avoir, dans le milieu supérieur, l'éther libre, d'autre vibration.

Passons au milieu inférieur, qui est aussi isotrope par hypothèse; il ne peut y avoir aussi que deux vibrations, l'une transversale, l'autre longitudinale, pour une vibration incidente.

Supposons la première transversale; on aura

$$s_1^2=\frac{g+h}{(1+g_1)^{n-1}}(a_1^2+c_1^2),$$

et l'on a toujours

$$s^2=(g+h)(a^2+c^2), \qquad s_1=s, \qquad a_1=a, \qquad r^2=(1+g_1)^{n-1};$$

donc

$$a_1^2+c_1^2=r^2(a^2+c^2)$$

ou

$$c_1^2=(r^2-1)a^2+r^2c^2;$$

on tire de là pour c_1 deux valeurs réelles égales et de signes contraires; il faut prendre la négative, car la positive donnerait une vibration incidente du milieu inférieur vers le milieu supérieur, ce qu'on ne suppose pas. On a, en outre,

$$A_1a+C_1c_1=0.$$

La dernière étant longitudinale, on a

$$s_2^2 = \frac{g + 3h}{(1 + g_1)^{n-1}}(a_2^2 + c_2^2),$$

et toujours

$$s^2 = (g + h)(a^2 + c^2), \qquad a_2 = a, \qquad s_2 = s, \qquad r^2 = (1 + g_1)^{n-1}:$$

donc

$$(a^2 + c_2^2)(g + 3h) = r^2(g + h)(a^2 + c^2);$$

on tirerait de là deux valeurs de c_2, et on prendrait la négative; mais on verra que l'amplitude de cette dernière vibration serait nulle dans le cas considéré. On a aussi

$$\frac{A_2}{a} = \frac{C_2}{c_2} \qquad \text{et} \qquad B_2 = 0.$$

Actuellement, les douze inconnues A', B', C', A'', ... sont liées par les douze équations linéaires

$$\begin{aligned}
A' + A'' + A_1 + A_2 &= 0,\\
B' + B'' + B_1 + B_2 &= B,\\
C' + C'' + C_1 + C_2 &= 0;\\
c'A' + c''A'' + c_1A_1 + c_2A_2 &= 0,\\
c'B' + c''B'' + c_1B_1 + c_2B_2 &= cB,\\
c'C' + c''C'' + c_1C_1 + c_2C_2 &= 0
\end{aligned}$$

fournies par le principe de continuité, et

$$\begin{aligned}
A'a' + C'c' &= 0,\\
B'' &= 0,\\
\frac{A''}{a} - \frac{C''}{c''} &= 0,\\
A_1a + C_1c_1 &= 0,\\
B_2 &= 0,\\
\frac{A_2}{a} - \frac{C_2}{c_2} &= 0;
\end{aligned}$$

on en conclut sans peine

$$A' = 0, \qquad A'' = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0,$$
$$C' = 0, \qquad C'' = 0, \qquad C_1 = 0, \qquad C_2 = 0.$$

Les seuls mouvements à considérer sont donc :

Dans le milieu supérieur, une vibration transversale réfléchie dont les composantes sont :

$$\xi' = 0, \qquad \eta_1 = B' e^{i(ax-st)}, \qquad \zeta' = 0$$

pour $z = 0$.

Et dans le milieu inférieur, une vibration transversale réfractée dont les composantes sont

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = B_1 e^{i(ax-st)}, \qquad \zeta_1 = 0$$

pour $z = 0$.

Entre les amplitudes, on a les relations

$$B' + B_1 = B,$$
$$B'c' + B_1 c_1 = Bc.$$

Ainsi, en tout point de la surface de séparation, le mouvement incident se trouve décomposé en deux autres; les deux nouvelles vibrations sont, comme la première, transversales, persistantes et polarisées de la même manière. Tout cela est bien d'accord avec la théorie de Fresnel.

Si l'on appelle α_1 l'angle du rayon réfracté avec la direction Oz', et l_1 sa longueur d'onde, on aura

$$a = +\frac{2\pi}{l}\sin\alpha, \qquad a' = +\frac{2\pi}{l}\sin\alpha, \qquad a_1 = +\frac{2\pi}{l_1}\sin\alpha_1,$$
$$c = -\frac{2\pi}{l}\cos\alpha, \qquad c' = +\frac{2\pi}{l}\cos\alpha, \qquad c_1 = -\frac{2\pi}{l_1}\cos\alpha_1:$$

de la condition $a_1 = a$, on tire

$$\frac{\sin\alpha}{l} = \frac{\sin\alpha_1}{l_1},$$

c'est la loi de Descartes. On a aussi

$$\frac{c}{c_1} = \frac{I}{I_1}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}.$$

Les relations entre les amplitudes peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} B - B' = B_1, \\ B + B' = B_1 \dfrac{c_1}{c}; \end{cases}$$

en les multipliant membre à membre,

$$B^2 - B'^2 = B_1^2 \frac{c_1}{c}$$

ou

$$B^2 \cos\alpha = B'^2 \cos\alpha + B_1^2 \frac{I}{I_1} \cos\alpha_1.$$

Soient δ et δ' les densités moyennes des deux milieux éthérés; on peut écrire

$$\delta B^2 I \cos\alpha = \delta B'^2 I' \cos\alpha + B_1^2 \frac{I_2}{I_1^2} \frac{\delta}{\delta'} I_1 \delta' \cos\alpha_1.$$

Faisons

$$b_1 = B_1 \frac{I}{I_1} \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta'}},$$

on aura

$$(2)\qquad \delta B^2 I \cos\alpha = \delta' B'^2 I' \cos\alpha + b_1^2 I_1 \delta' \cos\alpha_1,$$

ce qui veut dire que la force vive de l'onde incidente est égale à la somme des forces vives de l'onde réfléchie et d'une onde réfractée se propageant dans le milieu inférieur, et dont l'amplitude serait b_1.

Ici cesse l'accord avec la théorie de Fresnel. Dans cette théorie, on fait *comme si* b_1 *était égal à* B_1; on établit directement la première des équations (1) et l'équation (2); la seconde des équations (1) en est une conséquence.

La présente théorie donne directement, comme on l'a vu, les équa-

tions (I), et, si l'on veut que $B_1 = b_1$, il faut admettre que

$$\frac{I}{I_1}\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta'}} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta'}} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

ω et ω_0 étant les vitesses de propagation des ondes dans le milieu inférieur et dans l'éther libre, ce qui est justement la loi en question.

En résumé, les équations (I) ont été établies sans rien supposer sur la loi qui lie les densités aux vitesses de propagation, ni sur la loi d'action mutuelle des particules fluides, et subsistent, quelle que soit cette loi; *mais, si l'on veut que l'amplitude* B_1, *calculée au moyen de ces équations et pour tout point de la surface de séparation, se conserve lorsque l'onde correspondante se propage dans le milieu inférieur*, il faut admettre la loi de Fresnel, ce qui ne se peut, pour les raisons données plus haut. Donc l'hypothèse à rejeter est, au fond, celle que faisait implicitement Fresnel, à savoir $b_1 = B_1$.

Conformément à la théorie générale, il convient donc de tirer les amplitudes B' et B_1 en tous les points de la surface de séparation des équations (I). L'amplitude pour la vibration réfléchie convient pour tous les points, parce qu'elle se propage dans le même milieu que la vibration incidente. Mais les équations (1) ne sont pas suffisantes, il faut y joindre l'équation des forces vives (2); d'où l'on tire

$$b_1 = B\frac{I}{I_1}\frac{\sqrt{\delta'}}{\sqrt{\delta}}.$$

b_1 est l'amplitude qui convient à l'onde réfractée en tous les points du milieu inférieur.

4. *Cas où la vibration est dans le plan d'incidence.* — Les axes étant choisis comme dans le cas précédent, soient

$$\xi = A e^{i(ax+cz-st)},$$
$$\eta = 0,$$
$$\zeta = C e^{i(ax+cz-st)}$$

les composantes suivant ces axes d'une vibration transversale inci-

dente, c'est-à-dire telle que

$$Aa + Cc = 0.$$

Il y a à considérer ici quatre vibrations, deux réfléchies, l'une transversale, l'autre longitudinale, et deux réfractées, l'une transversale, l'autre longitudinale, parce que le milieu réfringent est encore supposé isotrope.

1° Soient

$$A' e^{i(a'x+b'y+c'z-s't)},$$
$$B' e^{i(a'x+b'y+c'z-s't)},$$
$$C' e^{i(a'x+b'y+c'z-s't)}$$

les composantes suivant les axes de la vibration transversale réfléchie; le principe de continuité, appliqué comme on l'a dit, donne

$$a' = a, \qquad b' = a, \qquad s' = s,$$

et l'on a, en outre,

$$c' = -c, \qquad A'a - C'c = 0.$$

2° Soient

$$A'' e^{i(a''x+b''y+c''z-s''t)},$$
$$B'' e^{i(a''x+b''y+c''z-s''t)},$$
$$C'' e^{i(a''x+b''y+c''z-s''t)}$$

les composantes de la vibration longitudinale réfléchie, le principe de continuité donne

$$a'' = a, \qquad b'' = 0, \qquad s'' = s,$$

et l'on a, en outre,

$$\frac{A''}{a''} = \frac{C''}{c''}, \qquad B'' = 0,$$

qui expriment que la vibration est longitudinale; les équations du mouvement dans l'éther libre donnent ensuite

$$c''^2 = \frac{g+h}{g+3h}(a^2+c^2) - a^2.$$

Si le second membre est positif, c'' est réel, et, pour avoir une onde plane réfléchie, il faut prendre pour c'' la valeur positive tirée de la précédente équation.

Si le second membre est négatif et égal à $-K^2$, il faut prendre pour c'' la valeur $-Ki$, alors la vibration est évanescente et devient insensible, elle s'éteint à une petite distance de la surface de séparation. Dans ce cas, il y a polarisation elliptique pour tous les rayons non évanescents, ce qui est en effet le cas le plus ordinaire, ainsi que l'a montré Jamin.

Mais cette polarisation elliptique est si faible pour les corps dont l'indice de réfraction est voisin de 1,40, que l'on peut la négliger dans ce cas, ce qui revient à considérer toutes les vibrations comme persistantes.

3° Soient

$$A_1 e^{i(a_1 x + b_1 y + c_1 z - s_1 t)},$$
$$B_1 e^{i(a_1 x + b_1 y + c_1 z - s_1 t)},$$
$$C_1 e^{i(a_1 x + b_1 y + c_1 z - s_1 t)}$$

les composantes de la vibration transversale réfractée; le principe de continuité donne

$$a_1 = a, \qquad b_1 = 0, \qquad s_1 = s,$$

puis des équations du mouvement dans l'éther qui pénètre le milieu pondérable; on tire

$$a^2 + c_1^2 = r^2(a^2 + c^2),$$

r étant l'indice de réfraction, d'où

$$c_1^2 = a^2(r^2 - 1) + r^2 c^2.$$

r étant supérieur à 1, la valeur de c_1^2 est toujours positive; on en tire pour c_1 une valeur réelle qui doit être prise avec le signe $-$, parce qu'il s'agit ici d'une vibration se propageant dans le milieu pondérable supposé du côté des z négatifs.

On a, en outre,

$$A_1 a + C_1 c_1 = 0,$$

qui exprime que la vibration est transversale.

4° Soient

$$A_2 e^{i(a_2 x + b_2 y + c_2 z - s_2 t)},$$

$$B_2 e^{i(a_2 x + b_2 y + c_2 z - s_2 t)},$$

$$C_2 e^{i(a_2 x + b_2 y + c_2 z - s_2 t)}$$

les composantes de la vibration longitudinale réfractée; le principe de continuité donne

$$a_2 = a, \qquad b_2 = 0, \qquad s_2 = s;$$

puis on tire des équations du mouvement

$$a_2^2 + c_2^2 = r^2 \frac{g+h}{g+3h}(a^2 + c^2),$$

d'où

$$c_2^2 = r^2 \frac{g+h}{g+3h}(a^2 + c^2) - a^2.$$

Comme on l'a dit plus haut, on supposera cette valeur de c_2^2 positive, et l'on prendra pour c_2 la valeur réelle qu'on tire de cette équation avec le signe $-$.

Comme la vibration est longitudinale, on aura ensuite

$$\frac{A_2}{a} = \frac{C_2}{c_2}, \qquad B_2 = 0.$$

Actuellement, il y a douze inconnues qui sont les amplitudes des composantes, savoir A', B', C', ...; A_2, B_2, C_2; la méthode générale fournit six équations qu'il faut joindre aux six autres précédemment écrites, et qui expriment que les vibrations sont transversales ou longitudinales : on a ainsi un système de douze équations linéaires à douze inconnues, savoir :

$$(1) \qquad A' + A'' + A_1 + A_2 = A,$$

$$(2) \qquad B' + B'' + B_1 + B_2 = 0,$$

$$(3) \qquad C' + C'' + C_1 + C_2 = C;$$

$$(4) \qquad -cA' + c''A'' + c_1 A_1 + c_2 A_2 = cA,$$

$$(5) \qquad -cB' + c''B'' + c_1 B_1 + c_2 B_2 = 0,$$

$$(6) \qquad -cC' + c''C'' + c_1 C_1 + c_2 C_2 = cC;$$

$$(7) \qquad A'a - C'c = 0,$$

$$(8) \qquad \frac{A''}{a} = \frac{C''}{c''},$$

$$(9) \qquad B'' = 0,$$

$$(10) \qquad A_1 a + C_1 c_1 = 0,$$

$$(11) \qquad B_2 = 0,$$

$$(12) \qquad \frac{A_2}{a} = \frac{C_2}{c_2}.$$

Les équations (2), (5), (9), (11) se réduisent à

$$B' + B_1 = 0,$$

$$-cB' + c_1 B_1 = 0.$$

Or

$$c + c_1 \neq 0,$$

car sinon on aurait

$$c_1^2 = c^2$$

ou

$$r^2 = 1,$$

ce qui n'est pas. Donc

$$B' = 0, \qquad B_1 = 0.$$

Toutes les vibrations réfléchies et réfractées s'exécutent dans le plan d'incidence, comme dans la vibration incidente.

Pour simplifier, nous poserons

$$\frac{A'}{c} = \frac{C'}{a} = u',$$

$$\frac{A''}{c} = \frac{C''}{c''} = u'',$$

$$\frac{A_1}{c_1} = -\frac{C_1}{a} = u_1,$$

$$\frac{A_2}{a} = \frac{C_2}{c_2} = u_2,$$

$$\frac{A}{c} = -\frac{C}{c} = u.$$

Alors les équations se réduisent à

$$(13)\quad \begin{cases} cu' + a\ u'' + c_1 u_1 + au_2 = cu, \\ au' + c''u'' - au_1 + c_2 u_2 = -au, \\ -c^2 u' + ac''u'' + c_1^2 u_1 + ac_2 u_2 = c^2 u, \\ -acu' + u''^2 u'' - ac_1 u_1 + c_2^2 u_2 = -acu; \end{cases}$$

u est donné, et tout revient à calculer u', u'', u_1, u_2. Mais ce calcul n'est pas nécessaire pour notre objet; il nous suffit de remarquer que l'on a, dans tous les cas,

$$(14)\quad \begin{cases} cu^2(a^2+c^2) = cu'^2(a^2+c^2) + c_1 u_1^2(a^2+c_1^2) \\ \qquad\qquad - c''u''^2(a^2+c''^2) + c_2 u_2^2(a^2+c_2^2), \end{cases}$$

que l'on tire de (13). Pour interpréter cette relation, soient

I, I', I'', I_1, I_2 les longueurs des ondes considérées;

α, α_1, α_2 les angles aigus des normales à l'onde incidente et aux ondes réfractées avec la normale intérieure au milieu réfringent;

α', α'' les angles aigus des normales aux ondes réfléchies avec la normale extérieure. La relation (14) peut s'écrire

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{2\pi}{\mathrm{I}}\cos\alpha(\mathrm{A}^2+\mathrm{C}^2) = \frac{2\pi}{\mathrm{I}'}\cos\alpha'(\mathrm{A}'^2+\mathrm{C}'^2) + \frac{2\pi}{\mathrm{I}_1}\cos\alpha_1(\mathrm{A}_1^2+\mathrm{C}_1^2) \\ \qquad + \frac{2\pi}{\mathrm{I}''}\cos\alpha''(\mathrm{A}''^2+\mathrm{C}''^2) + \frac{2\pi}{\mathrm{I}_2}\cos\alpha_2(\mathrm{A}_2^2+\mathrm{C}_2^2), \end{cases}$$

et, si l'on désigne par δ la densité moyenne de l'éther libre, par δ' celle de l'éther engagé dans le milieu pondérable,

$$(16)\quad \begin{cases} \delta\,\mathrm{I}\cos\alpha(\mathrm{A}^2+\mathrm{C}^2) = \delta\,\mathrm{I}'\cos\alpha'(\mathrm{A}'^2+\mathrm{C}'^2) \\ \qquad + \delta'\,\mathrm{I}_1\cos\alpha_1(\mathrm{A}_1^2+\mathrm{C}_1^2)\frac{\mathrm{I}^2\delta}{\mathrm{I}_1^2\delta'} \\ \qquad + \mathrm{I}''\delta\cos\alpha''(\mathrm{A}''^2+\mathrm{C}''^2) \\ \qquad + \delta'\,\mathrm{I}_2\cos\alpha_2(\mathrm{A}_2^2+\mathrm{C}_2^2)\frac{\mathrm{I}^2\delta}{\mathrm{I}_2^2\delta'}. \end{cases}$$

Si l'on fait

$$A_1 \frac{1}{I_1}\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}} = A'_2, \qquad A_2 \frac{1}{I_2}\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}} = A'_2,$$

$$C_1 \frac{1}{I_1}\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}} = C'_1, \qquad C_2 \frac{1}{I_2}\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}} = C'_2,$$

on peut l'écrire

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta I \cos\alpha (A^2 + C^2) &= \delta I' \cos\alpha' (A'^2 + C'^2) \\ &+ \delta' I_1 \cos\alpha_1 (A_1'^2 + C_1'^2) \\ &+ I'' \delta \cos\alpha'' (A''^2 + C''^2) \\ &+ \delta' I_2 \cos\alpha_2 (A_2'^2 + C_2'^2). \end{aligned} \right.$$

Sous cette forme, elle exprime que la force vive incidente est égale à la somme des forces vives de quatre ondes, deux réfléchies, dont les amplitudes A', C', A'', C'' sont bien celles qui ont été fournies directement par le principe de continuité, ce qui est bien conforme à notre explication générale, puisqu'elles se propagent dans le même milieu que l'onde incidente, deux réfractées dont les amplitudes A'_1, C'_1, A'_2, C'_2 se déduisent des amplitudes correspondantes A_1, C_1, A_2, C_2 calculées pour la surface de séparation, de manière à satisfaire au principe des forces vives, quelle que soit l'incidence.

Si l'on voulait, comme le supposait Fresnel, que les amplitudes calculées pour les ondes réfléchies pour tous les points de la surface de séparation se conservassent lorsque les vibrations correspondantes se propagent dans le milieu réfringent, il faudrait supposer à la fois

$$\frac{1}{I_1}\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}} = 1, \qquad \frac{1}{I_2}\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}} = 1;$$

la première condition est l'hypothèse de Fresnel, mais elle est incompatible avec la seconde, car I_2 ne peut pas être égal à I_1.

5. *Cas général.* — Si l'on suppose maintenant que la vibration incidente est quelconque, et qu'on prenne pour zOx le plan d'incidence,

ses composantes sont

$$A e^{i(ax+cz-st)},$$
$$B e^{i(ax+cz-st)},$$
$$C e^{i(ax+cz-st)},$$

ou encore

$$B'' = 0, \qquad B_2 = 0,$$

puis

$$B' + \quad B_1 = B,$$
$$-cB' + c_1 B_1 = cB;$$

d'où

$$\delta I B^2 \cos\alpha = \delta I' B'^2 \cos\alpha' + \delta' I_1 B_1^2 \cos\alpha_1 \frac{I^2}{I_1^2} \frac{\delta}{\delta'};$$

en ajoutant membre à membre cette équation à (17), on a

$$\begin{aligned}\delta I \cos\alpha (A^2 + B^2 + C^2) = {} & \delta I' \cos\alpha' (A'^2 + B'^2 + C'^2) \\ & + \delta' I_1 \cos\alpha_1 (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) \frac{I^2}{I_1^2} \frac{\delta}{\delta'} \\ & + I'' \delta \cos\alpha'' (A''^2 + C''^2) \\ & + I_2 \delta' \cos\alpha_2 (A_2^2 + C_2^2) \frac{I^2 \delta}{I_2^2 \delta'},\end{aligned}$$

qui s'interprète comme précédemment et conduit aux mêmes conséquences.

6. *Cas d'un corps biréfringent.* — Dans le cas de la double réfraction, la méthode générale précédemment appliquée réussit encore et conduit à des conséquences analogues à celles que l'on a déjà trouvées; il n'y a aucun intérêt à la développer ici, et je me bornerai à une remarque qui me paraît importante.

Les deux vibrations transversales réfractées se déplacent dans le même milieu avec des vitesses différentes et dans des directions différentes; la loi de Fresnel, appliquée à ces rayons, voudrait que la densité moyenne de l'éther dans l'intérieur d'une des cellules formées par les particules pondérables variât avec la direction autour du centre de cette cellule; or il n'en est rien.

Quelle que soit l'idée que l'on se fasse de l'action des particules pondérables sur l'éther, il faut bien que cette action se manifeste par une déformation de l'éther libre, c'est-à-dire par un changement dans les positions relatives de ses particules, ou enfin une altération des différences des coordonnées de ces particules. Le calcul prouve qu'il suffit de considérer ces variations de différences de coordonnées comme des fonctions linéaires de ces différences dans l'éther libre, et alors, si l'on choisit convenablement les axes et l'origine étant au centre d'une cellule, les différences désignées par Δx, Δy, Δz deviennent, après la déformation,

$$\Delta x(1+g_1)(1+\alpha),\quad \Delta y(1+g_1)(1+\beta),\quad \Delta z(1+g_1)(1+\gamma),$$

g_1, α, β, γ étant des constantes dépendant seulement de la constitution du milieu pondérable (t. X, p. 173).

Actuellement, considérons le tétraèdre formé par quatre des points du milieu éthéré, et soient

$$\begin{matrix} \Delta x, & \Delta y, & \Delta z, \\ \Delta' x, & \Delta' y, & \Delta' z, \\ \Delta'' x, & \Delta'' y, & \Delta'' z \end{matrix}$$

les différences de coordonnées de l'un des points et des trois autres dans l'éther libre; le volume du tétraèdre sera

$$\pm\tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ \Delta' x & \Delta' y & \Delta' z \\ \Delta'' x & \Delta'' y & \Delta'' z \end{vmatrix}$$

avant la déformation, et après il sera

$$\pm\tfrac{1}{3}(1+g_1)^3(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ \Delta' x & \Delta' y & \Delta' z \\ \Delta'' x & \Delta'' y & \Delta'' z \end{vmatrix},$$

et, comme la masse des particules reste la même, on a

$$\frac{\delta}{\delta'} = (1 + g_1)^3 (1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma).$$

δ étant la densité moyenne de l'éther libre, δ' de l'éther engagé dans le milieu pondérable.

Le second membre ne dépend pas de la direction autour de l'origine, et par conséquent δ' ne change pas avec la direction.

Ainsi, contrairement à une opinion généralement admise, de ce que la déformation n'est pas la même dans tous les sens et peut se traduire au moyen d'un ellipsoïde, comme on le fait dans la théorie de l'élasticité, il ne résulte pas du tout que la densité moyenne varie avec la direction autour d'un point, et il est impossible d'accorder la loi de Fresnel avec la coexistence de deux vibrations transversales se propageant avec des vitesses différentes, et dont l'une au moins ne se propage pas avec la même vitesse dans tous les sens.

La seule manière d'échapper à toutes les difficultés que soulève l'examen attentif de la question me paraît être celle que j'ai proposée dans ce travail; elle est absolument conforme aux principes généraux de la Mécanique et n'entraîne que le rejet de la loi de Fresnel, qui est d'ailleurs inutile.

Les formules de Fresnel, les mêmes que celles que nous avons trouvées, au moins pour le premier cas, ont été vérifiées par l'expérience, et l'on serait tenté de croire que sa loi l'est aussi, mais il faut remarquer que ces vérifications portent sur les *intensités* des rayons réfléchis et des rayons réfractés, et non sur les *amplitudes seules*, puisque l'intensité dépend à la fois de la densité du milieu et de l'amplitude de la vibration : elles ne prouvent donc rien pour ces amplitudes seules. Dans tous les cas, l'expression de l'intensité du rayon réfléchi reste la même que celle qu'a trouvée Fresnel, celle du rayon réfracté lui est toujours complémentaire, de telle sorte que le rejet de la loi n'est nullement en opposition avec les vérifications expérimentales des intensités.

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME II.

Pages.

Mémoire d'Optique géométrique comprenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques; par M. *A. Mannheim* 4

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. — *Deuxième Mémoire :* Groupes cubiques; par M. *Léon Autonne* 49

Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites *arbitraires* d'une variable réelle; par M. *K. Weierstrass*. Traduit par M. *Léonce Laugel* ..... 105 et 115

Sur le coefficient du terme général dans certains développements; par M. *A.-H. Anglin* 139

Sur les courbes définies par les équations différentielles (quatrième Partie); par M. *H. Poincaré* 151

Propositions arithmétiques tirées de la théorie de la fonction exponentielle. (Extrait d'une Lettre adressée à M. *Hermite*); par M. *Lipschitz* 219

Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques; par M. *G. Humbert* 239

Pages.

Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce; par M. *Émile Picard* 329

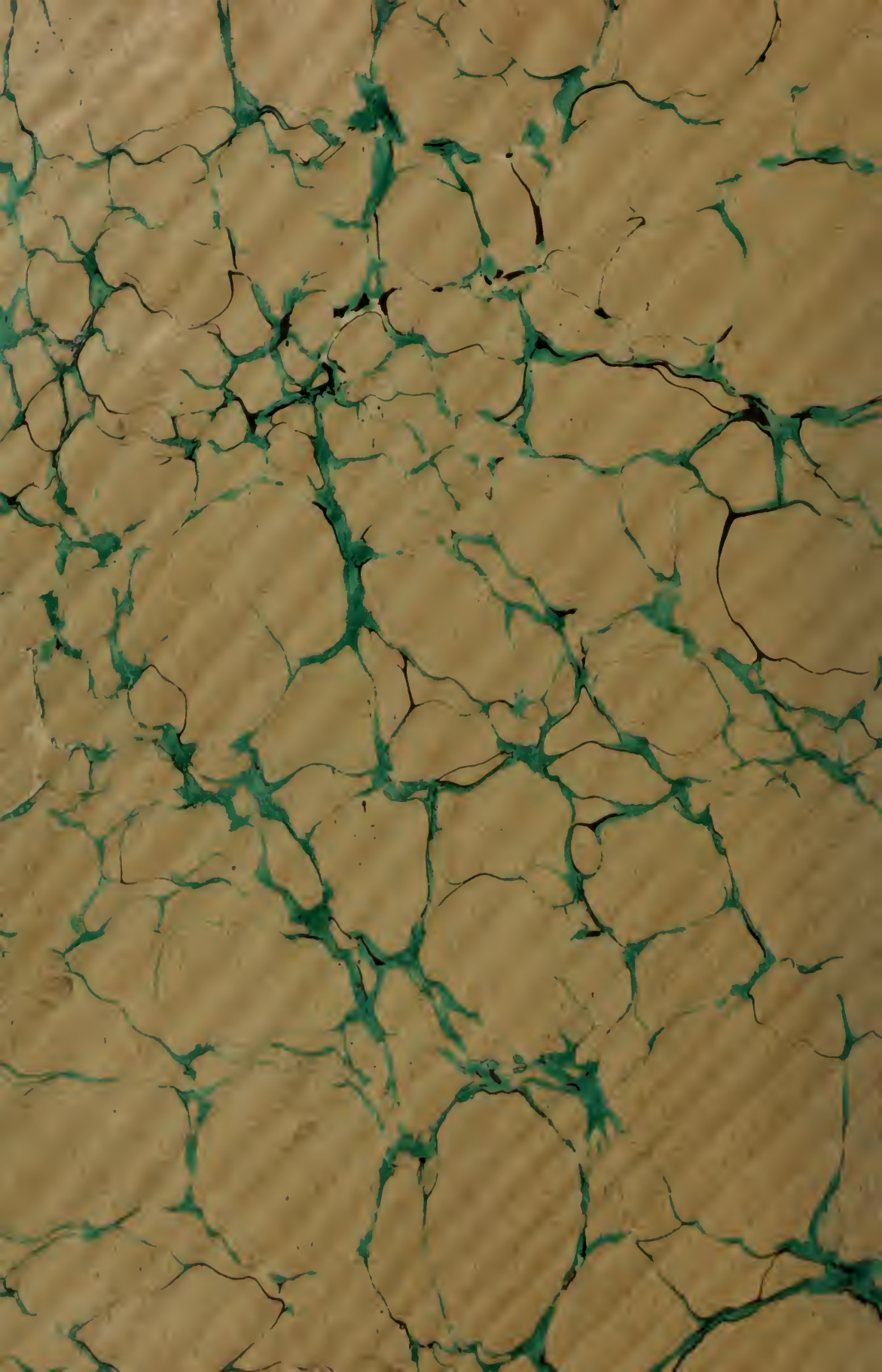
Recherches sur la transformation par des substitutions réelles d'une somme de deux ou de trois carrés en elle-même; par M. *Lipschitz* (traduit par M. *J. Molk*, à Besançon) 373

Sur une loi de Fresnel; par M. *E. Jablonski* 411

FIN DU TOME II DE LA QUATRIÈME SÉRIE.

10363 PARIS. IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

11



QA
1
J684
sér.4
t.2
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY